әл - Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті

ӘОЖ 517.968.7

Қолжазба құқығында

БӨРІХАНОВ МЕЙІРХАН БАТЫРХАНҰЛЫ

Бөлшек ретті дифференциалдық теңдеулердің регуляр және сингуляр шешімдерін зерттеу

6D060100-Математика

Философия докторы (PhD)
дәрежесін алу үшін дайындалған диссертация

Отандық ғылыми кеңесші
PhD, қауымдастырылған профессор
Төребек Б.Т.
Шетелдік ғылыми кеңесші
PhD, профессор
Киране М. (Ла Рошель, Франция)

Қазақстан Республикасы
Алматы, 2020

МАЗМҰНЫ

КІРІСПЕ

Жұмыстың жалпы сипаттамасы. Бұл диссертациялық жұмыс бөлшек ретті дифференциалдық теңдеулердің регуляр және сингуляр шешімдерін зерттеуге арналған. Риман - Лиувилль, Капуто - Фабрицио және жалпыланған Капуто - Фабрицио мағынасындағы бөлшек ретті дифференциалдық операторлар қатысқан диффузия теңдеуі үшін максимум қағидасы зерттелді. Сызықты бөлшек ретті диффузия теңдеуі үшін Дьюамел принципінің аналогы алынды. Бейлокалды және салмақты бейсызықты диффузия теңдеулері мен теңдеу жүйелерінің локалды шешімдерінің бар болуы зерттелді. Экспоненциалды бейсызықты бөлшек ретті диффузия теңдеуі және теңдеулер жүйесінің локалды және глобалды шешілімділігі зерттелді. Полинималды бейсызықты бөлшек ретті диффузия теңдеуі мен теңдеулер жүйесі үшін глобал шешімнің болмау шарттары, яғни Фуджита типті критикалық көрсеткіштері табылды.

Зерттеу тақырыбының өзектілігі. Бөлшек ретті дифференциалдық операторлар әртүрлі жолдармен енгізіледі. Осыған байланысты бөлшек ретті дифференциалдық теңдеулерді және шеттік есептерді шешу кезінде енгізілген операторға тәуелді түрлі тәсілдерді меңгеру қажет.

Сонымен қатар бөлшек ретті интегро-дифференциалды операторлардың қолданылуы, функциялар теориясы мен шеттік есептердің белгілі мәселелерін тереңірек ұғындыруға және есептердің ауқымды шеңберін қамтитын шешімдердің жаңа класын алуға септігін тигізеді.

Өткен ғасырдың 90-шы жылдары аномалды диффузия [1] теориясындағы негізгі рөлді бөлшек ретті туынды қатысқан теңдеулер алатындығы түсінікті болды [2]. Сол себепті бөлшек ретті туынды қатысқан теңдеулер үшін қойылған әр түрлі есептерді зерттеу өзекті және бір жағынан қолданбалы ғылым болып табылады.

Жалпы алғанда, дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер теориясын зерттеуде кеңінен қолданылатын, негізгі танымал әдістердің бірі максимум және минимум қағидасы болып табылады. Бұл қағида есептің шешімдері жайында ақпаратты олардың накты формалары туралы мәліметтерді білмей-ақ алуға мүмкіндік береді.

Соңғы кездері бөлшек ретті дифференциалдық теңдеулер есептерінің дамуына байланысты максимум қағидасына ерекше назар аударыла бастады [3-10].

Математикалық физика саласындағы бейсызықты есептер теориясының өзекті бағыттарының бірі глобалды шешілімділік және шешімнің ақырлы уақытта қирауын зерттеу болып табылады.

Бейсызықты теңдеулердің глобалды шешілімділігінің классикалық теориясы негізінен бастапқы және шекаралық есептердің шешілуін қамтамасыз ететін жеткілікті шарттарға негізделген. Бұл жаңа құбылыс Фуджитаның классикалық жұмысынан бастау алып, салыстырмалы түрде жақын арада пайда болды және шешімнің қирауы (blow-up) деген атау алды.

1966 жылы жапондық математик Х.Фуджита бейсызықты жылу теңдеуі үшін глобалды шешімнің бар болуы және шешімнің ақырлы уақытта қирауының критикалық көрсеткішін дәлелдеді [11]. Оның құрметіне, мұндай көрсеткіш «Фуджитаның критикалық көрсеткіші» деп аталды.

Бүгінгі таңда Фуджита нәтижелерінің әртүрлі жалпылаулары көптеген еңбектерде зерттелген (мысалы [12-18]). Сондай-ақ, [19-32] диффузия теңдеуінің бөлшек ретті аналогтары мен интегралды бейсызықты диффузия теңдеуі үшін Фуджита типті критикалық көрсеткіштер зерттелінген.

Диссертациялық жұмыстың мақсаты бөлшек ретті операторлар қатысқан диффузия теңдеулері мен теңдеулер жүйесі үшін қойылған сызықты және бейсызықты есептердің регуляр және сингуляр шешімдерін зерттеудің жалпы теориясын дамыту.

Сонымен қатар алынған нәтижелер арқылы берілген сызықты және бейсызықты диффузия теңдеуі мен теңдеулер жүйелерін зерттеу болып табылады.

Диссертациялық жұмыстың мақсатына жету үшін келесі **негізгі есептерді** шешу қарастырылған:

- Риман - Лиувилль, Капуто - Фабрицио және жалпыланған Капуто - Фабрицио мағынасындағы бөлшек ретті дифференциалдық операторлар қатысқан диффузия теңдеуі үшін максимум қағидасын зерттеу;
- Сызықты бөлшек ретті диффузия теңдеуі үшін Дьюамел принципінің аналогын алу;
- Бейлокалды және салмақты бейсызықты диффузия теңдеулері мен теңдеу жүйелерінің локалды шешімдерінің бар болуын зерттеу;
- Экспоненциалды бейсызықты бөлшек ретті диффузия теңдеуі және теңдеулер жүйесінің локал және глобал шешілімділігін зерттеу;
- Полинималды бейсызықты бөлшек ретті диффузия теңдеуі мен теңдеулер жүйесі үшін глобал шешімнің болмау шарттарын, яғни Фуджита типті критикалық көрсеткіштерін табу;

Зерттеу объектісі - Риман - Лиувилль, Капуто - Фабрицио және жалпыланған Капуто - Фабрицио мағынасындағы бөлшек ретті дифференциалдық операторлар қатысқан бастапқы - шеттік шарттармен берілген диффузия теңдеуі. Сонымен қатар экспоненциалды және полинималды бейсызықтылықпен берілген бөлшек ретті интегро - дифференциалды теңдеулер және теңдеулер жүйесі.

Зерттеу әдістері. Диссертациялық жұмыстың есептерін шешу кезінде дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер теориясының және функционалды талдау теориясының классикалық әдістері қолданылды.

Бейсызықты интегро-дифференциалды диффузия теңдеулерінің шешімдерінің қасиеттерін зерттеу кезінде дербес туындылы дифференциалды теңдеулер және бейсызықты анализ теориясының әртүрлі әдістерін, атап айтқанда

Локал шешімнің бар болуын дәлелдеу үшін:

- Интегралды теңдеулерге келтіру әдісі және Дьюамел прицipі;

- Іргелі шешім әдісі және Грин функция әдісі;
- Қысып бейнелеу әдістері;
- Бөлшек ретті есептеу әдістері;
- Жылжымайтын нүктелер туралы теоремалар.

Шешімнің қирауын зерттеу үшін:

- Бөлшек ретті туындыларға арналған теңсіздіктер;
- Сынақ функциялар әдісі қолданылды.

Зерттеудің ғылыми жаңалығы. Бұл диссертациялық жұмыста зерттелген сызықты және бейсызықты бөлшек ретті туынды қатысқан математикалық физиканың мәселелері жаңа болып табылады, сонымен қатар классикалық сызықты есептерді, сондай-ақ маңызды қолданыстары бар бейсызықты есептер класын қамтиды. Қарастырылып отырған мәселелер негізінен осыған дейін зерттелінбеген немесе дербес жағдайлары үшін ғана зерттелінген. Сондықтан, ғылыми-зерттеу жұмысы белгілі нәтижелерді жалпылайды.

Зерттеудің тәжірибиелік және теориялық маңыздылығы.

Зерттеу тақырыбы негізінен теориялық және фундаменталды болып табылады, олардың ғылыми маңыздылығы дифференциалды операторлар теориясының терең, заманауи нәтижелерін қолдану және зерттеу мен талдаудың жаңа өзіндік әдістерін құрумен байланысты.

Бұл жұмыстың басқа ғылыми-зерттеу жұмыстарымен байланысы.

Диссертациялық жұмыс «Математикалық физиканың бөлшек ретті туындылы сызықты және бейсызықты есептерінің регуляр және сингуляр шешімдері» (AP05131756, 2018-2020) және «Бейсызықты дербес туындылы дифференциалдық теңдеулердің кейбір бейлокал аналогтары» (AP08052046, 2020-2022) тақырыптарындағы ҚР БҒМ жаратылыстану ғылымдары саласындағы іргелі зерттеулерді гранттық қаржыландыру жобалары шеңберінде орындалды.

Автордың жеке үлесі. Диссертацияда келтірілген барлық нәтижелер автордың жеке өзі немесе оның тікелей қатысуымен алынды. Ғылыми кеңесшілер есептің қойылымына және алынған нәтижелерді талқылауға өз үлестерін қосты.

Диссертацияның сынақтан өтуі мен талқылануы

Диссертациялық жұмыста алынған негізгі нәтижелер: «Traditional International April scientific conference in honor of the Science Day» атты конференциясында (Алматы, 2018), Современные методы теории краевых задач: международная конференция «Понтрягинские чтения - XXIX», посвященной 90 - летию Владимира Александровича Ильина атты конференциясында (Москва, 2018), Fourth International Conference on Analysis and Applied Mathematics атты конференциясында (Turkey, 2018), International Conference “Actual Problems of Analysis, Differential Equations and Algebra” конференциясында (Nur-Sultan, 2019), ҚР ҰҒА академигі Т.Ш. Кальменов, ҚР ҰҒА корреспондент-мүшесі., ф. - м. ғ. д., профессор М. А. Садыбеков, ф.-м. ғ. д., профессор Б. Е. Кангужин жетекшілігімен, әл-Фараби атындығы ҚазҰУ механика-математика факультетінің «Дифференциалдық операторлар және олардың қолданыстары» қалалық ғылыми-зерттеу семинарында баяндалып талқыланды.

Диссертация тақырыбы бойынша 12 жұмыс, соның ішінде 2 жарияланым Web of Science және Scopus деректер қорлары бойынша импакт-факторы бар шетелдік журналдарда, 3 жарияланым ҚР БҒМ Білім және ғылым саласындағы бақылау комитетімен ұсынылған тізімге кіретін ғылыми басылымдарда, 2 жарияланым қолжазба құқығында, 1 жарияланым отандық журналда және 4 жарияланым халықаралық ғылыми конференция материалдарында жарияланды.

Диссертациялық жұмыстың құрылымы мен сипаттамасы.

Диссертациялық жұмыс кіріспеден, 3 тараудан, қорытынды және қолданылған әдебиеттер тізімінен тұрады. Жұмыстың көлемі - 102 бет. Әдебиеттер саны - 55.

Бірінші тарауда Риман - Лиувилль, Капуто - Фабрицио және жалпыланған Капуто - Фабрицио мағынасындағы бөлшек ретті дифференциалдық операторлар қатысқан диффузия теңдеуі үшін максимум қағидасы қарастырылады. Алынған нәтижелер арқылы сызықты және бейсызықты бөлшек ретті диффузия теңдеулерінің шешімдері зерттеледі.

Екінші тарауда сызықты бөлшек ретті дифференциалдық теңдеу үшін Дьюамел принципі алынады. Осы нәтиже мен Банахтың жылжымайтын нүкте теоремасы арқылы полинималды және интегралды, экспоненциалды бейсызықты интегро - дифференциалды теңдеулер мен теңдеулер жүйесінің локал интегралды шешімдері зерттеледі.

Үшінші тарауда экспоненциалды, полинималды және интегралды бейсызықтылықпен берілген диффузия теңдеулері мен теңдеулер жүйесі үшін глобал шешімнің болмау шарттары, яғни Фуджита типті критикалық көрсеткіштері анықталады.

1 БӨЛШЕК РЕТТІ ТУЫНДЫЛАР ҮШІН МАСКИМУМ ҚАҒИДАСЫ ЖӘНЕ ОНЫҢ ҚОЛДАНЫСТАРЫ

Дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер теориясын зерттеуде кеңінен қолданылатын танымал әдістердің бірі максимум және минимум қағидасы болып табылады. Бұл қағида есептің шешімдері жайындағы ақпараттарды олардың нақты формалары туралы мәліметтерді білмей-ақ алуға мүмкіндік береді. Қазіргі таңда бөлшек ретті дифференциалдық теңдеулер есептерінің дамуына байланысты осы операторлардың максимум қағидасы ерекше зерттелуде.

Мысалы, Лучко [3] жұмыста Капуто және Риман-Лиувилль мағынасындағы бөлшек ретті туындылар үшін максимум қағидасын алды. Осы максимум қағидасы негізінде ашық шектелген облыстағы жалпыланған диффузиялық теңдеудің шешімі бар болса жалғыз және бастапқы мәннен үздіксіз тәуелді болатындығын дәлелдеді [4].

Алынған нәтижелер басқа да уақыт бойынша бөлшек ретті диффузиялық теңдеулердің [5-10] максимум қағидасын дәлелдеу үшін қолданылған.

1.1 Бөлшек ретті интегралдар мен туындылар және олардың қасиеттері

Бұл бөлімде бөлшек ретті интегро-дифференциалды операторлардың анықтамалары мен қасиеттерін, сонымен қатар осы операторлар қатысқан леммалар қарастырылады.

1.1.1 - анықтама [31, 69 бет] Берілген $\alpha \in (0,1)$ саны және $f(t) \in L^q(0,T)$ $(1 \le q \le \infty)$ функциясы үшін

$$I_{0|t}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)\,ds, \quad t \in (0,T]$$

және

$$I_{t|T}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^T (s-t)^{\alpha-1} f(s)\,ds, \quad t \in [0,T)$$

өрнектері Риман - Лиувилль мағынасындағы сол жақты $I_{0|t}^{\alpha} f(t)$ және оң жақты $I_{t|T}^{\alpha} f(t)$ бөлшек ретті интегралдары деп аталады. Мұндағы $\Gamma(\alpha)$ - Эйлер гамма функциясы.

1.1.2 - анықтама [31, 70 бет] Берілген $0 < \alpha < 1$ және $f(t) \in AC([0,T])$ функциясы үшін

$$D_{0|t}^{\alpha} f(t) = \frac{d}{dt} I_{0|t}^{1-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} f(s)\,ds, \quad t \in (0,T]$$

және

$$D_{t|T}^{\alpha} f(t) = -\frac{d}{dt} I_{t|T}^{1-\alpha} f(t) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_t^T (s-t)^{-\alpha} f(s) ds, \quad t \in [0,T)$$

өрнектері Риман - Лиувилль мағынасындағы сол жақты $D_{0|t}^{\alpha} f(t)$ және оң жақты $D_{t|T}^{\alpha} f(t)$ бөлшек ретті туындылар деп аталады.

1.1.3 - анықтама [31, 91 бет] Берілген $f(t) \in AC^1([0,T])$ функциясы және $\alpha \in (0,1)$ саны үшін

$$\mathbf{D}_{0|t}^{\alpha} f(t) = I_{0|t}^{1-\alpha} \frac{d}{dt} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} f'(s) ds, \quad t \in (0,T]$$

және

$$\mathbf{D}_{t|T}^{\alpha} f(t) = -I_{t|T}^{1-\alpha} \frac{d}{dt} f(t) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_t^T (s-t)^{-\alpha} f'(s) ds, \quad t \in [0,T)$$

өрнектер сәйкесінше Капуто мағынасындағы α - ретті сол жақты және оң жақты бөлшек ретті туынды деп аталады.

1.1.4 - анықтама [32] Берілген $0 < \alpha < 1$ саны және $f(t) \in H^1(0,T)$ фунциясы үшін

$${}_{CF}\mathbf{D}_{0|t}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{1-\alpha} \int_0^t \exp\left(-\frac{1}{1-\alpha}(t-\tau)\right) f'(\tau) d\tau$$

өрнек Капуто - Фабрицио мағынасындағы α - ретті туынды деп аталады.

1.1.5 - анықтама [33] $[0,T]$ аралығында анықталған $f(t)$ нақты функциясы үшін

$${}_{CF}\mathbf{I}_{0|t}^{\alpha} f(t) = (1-\alpha) f(t) + \alpha \int_0^t f(\tau) d\tau, \; t \geq 0, \alpha > 0$$

өрнек Капуто - Фабрицио мағынасындағы α - ретті интеграл деп аталады.

1.1.6 - қасиет [34] Кез - келген $\alpha \in (0,1)$ үшін

$${}_{CF}\mathbf{I}_{0|t}^{\alpha} \left[{}_{CF}\mathbf{D}_{0|t}^{\alpha} u \right](t) = u(t) - u(0)$$

теңдігі орынды.

1.1.7 - анықтама [35] Берілген $f(t)\in W_2^1([a,b])$ функциясы және $0<\alpha<1$ саны үшін

$$ {}_{CF}^{\ *}\mathbf{D}_{0|t}^{\alpha} f(t)=\frac{1}{1-\alpha}\int_0^t E_{\alpha,1}\left[-\alpha\frac{(t-\tau)^{\alpha}}{1-\alpha}\right]f'(\tau)\,d\tau $$

өрнегі жалпыланған Капуто - Фабрицио мағынасындығы α - ретті туынды деп аталады. Мұндағы $E_{\alpha,1}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)}$ - Миттаг-Леффлер функциясы.

1.1.8 - анықтама [35] Берілген $\alpha\geq 0$ саны және $f(t)\in L^1([a,b])$ функциясы үшін

$$ {}_{CF}^{\ *}\mathbf{I}_{0|t}^{\alpha} f(t)=(1-\alpha)\,f(t)+\alpha I_{0|t}^{\alpha} f(t) $$

өрнегі жалпыланған Капуто - Фабрицио мағынасындағы α - ретті интеграл деп аталады. Мұндағы $I_{0|t}^{\alpha} f(t)$ сол жақты Риман - Лиувилль мағынасындағы бөлшек ретті интеграл.

1.1.9 - қасиет [35] Берілген $\alpha\in(0,1)$ саны және $f(t)\in C^1([a,b])$ функциясы үшін

$$ {}_{CF}^{\ *}\mathbf{I}_{0|t}^{\alpha}\left[{}_{CF}^{\ *}\mathbf{D}_{0|t}^{\alpha} f\right](t)=f(t)-f(0) $$

теңдігі орынды.

1.1.10 - қасиет Берілген $\alpha\in(0,1)$ саны және $f(t)\in C^1([a,b])$ функциясы үшін

$$ {}_{CF}^{\ *}\mathbf{D}_{0|t}^{\alpha} f(t)=\frac{1}{1-\alpha}\left(f(t)-E_{\alpha,1}\left[-\alpha\frac{t^{\alpha}}{1-\alpha}\right]f(0)\right)- $$

$$ -\frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}\int_0^t f(\tau)(t-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left[-\alpha\frac{(t-\tau)^{\alpha}}{1-\alpha}\right]d\tau $$

теңдігі орынды.

Дәлелдеуі: Бөліктеп интегралдау әдісі бойынша

$$ {}_{CF}^{\ *}\mathbf{D}_{0|t}^{\alpha} f(t)=\frac{1}{1-\alpha}\left(f(\tau)E_{\alpha,1}\left[-\alpha\frac{(t-\tau)^{\alpha}}{1-\alpha}\right]\right)\Bigg|_{\tau=0}^{\tau=t}- $$

$$-\frac{1}{1-\alpha}\int_0^t f(\tau)\frac{d}{d\tau}E_{\alpha,1}\left[-\alpha\frac{(t-\tau)^\alpha}{1-\alpha}\right]d\tau$$

теңдігін аламыз. Сонымен қатар, Миттаг-Леффлер функциясының

$$\frac{d}{d\tau}E_{\alpha,1}\left[-\alpha\frac{(t-\tau)^\alpha}{1-\alpha}\right]=\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left[-\alpha\frac{(t-\tau)^\alpha}{1-\alpha}\right]$$

қасиетін пайдаланып [31, 40 бет]

$$ {}_{CF}^{*}\mathbf{D}_{0|t}^{\alpha} f[t]=\frac{1}{1-\alpha}\left(f(t)-E_{\alpha,1}\left[-\alpha\frac{t^\alpha}{1-\alpha}\right]f(0)\right)-$$

$$-\frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}\int_0^t f(\tau)(t-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left[-\alpha\frac{(t-\tau)^\alpha}{1-\alpha}\right]d\tau$$

теңдігі орынды болатындығын аламыз.
1.1.11 - қасиет Егер $\alpha\to 0$ болса, онда

$$ {}_{CF}^{*}\mathbf{D}_{0|t}^{\alpha} f(t)\to f(t)-f(0)$$

қатынасы орынды.
1.1.12 - лемма [36, 160 бет] Айталық $\delta(x)$ функциясы

$$\delta(x)=\begin{cases}+\infty & \text{егер} \quad x=0,\\ 0 & \text{егер} \quad x\neq 0\end{cases}$$

өрнегімен анықталған және

$$\int_{R^N}\delta(x)dx=1$$

қасиетіне ие Дирак функциясы болсын [37]. Онда келесі теңдіктер орынды:

$$F\{\delta(x);\xi\}=\frac{1}{(2\pi)^N}\int_{R^N}e^{-i<x,\xi>}\delta(x)dx=1,\quad \xi\in R^N,$$

$$F^{-1}\{1\}=\frac{1}{(2\pi)^N}\int_{R^N}e^{i<x,\xi>}d\xi=\delta(x),\quad \xi\in R^N .$$

Мұндағы $<x,\xi>=\sum_{j=1}^{N}x_j\xi_j$, $F\{\cdot\}$ - Фурье түрлендіруі, $F^{-1}\{\cdot\}$ - кері Фурье түрлендіруі.

1.1.13 - анықтама [38] Берілген $\alpha>0,\ \beta\in R$ сандары үшін

$$E_{\alpha,\beta}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)},\ \ z\in\mathbb{C}$$

өрнегі екі параметрлі Миттаг - Леффлер функциясы деп аталады.

1.1.14 - лемма [39] Кез - келген $\alpha\in(0,1)$ саны үшін

$$\frac{1}{1+\Gamma(1-\alpha)x}\le E_{\alpha,1}(-x)\le\frac{1}{1+\left[\Gamma(1+\alpha)\right]^{-1}x},\ \ x\ge 0$$

бағалауы орынды.

Ескерту. 1.1.14 - лемма бойынша кез - келген $x>0$ үшін $0<E_{\alpha,1}(-x)<1$ бағалауы орынды.

1.1.15 - қасиет [31, 75 бет] Берілген $0<\alpha<1$ саны және $I_{0|t}^{1-\alpha}f(t)\in AC^1[0,T]$, $f(t)\in L^1(0,T)$ функциясы үшін

$$I_{0|t}^{1-\alpha}\left[D_{0|t}^{1-\alpha}f\right](t)=f(t)-\frac{I_{0|t}^{1-\alpha}f(0)}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1}$$

теңдігі орынды.

1.1.16 - қасиет [31, 74 бет] Берілген $f(t)\in L^q(0,T)$ $(1\le q\le\infty)$ функциясы үшін

$$D_{0|t}^{1-\alpha}\left[I_{0|t}^{1-\alpha}f\right](t)=f(t)$$

теңдігі орынды.

1.1.17 - қасиет [31, 76 бет] Айталық, $\alpha>0,\ p\ge 1,\ q\ge 1$ және $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\le 1+\alpha$ ($p\ne 1$ және $q\ne 1$ жағдайында $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1+\alpha$) болсын. Онда $g(t)\in L^p(0,T)$ және $f(t)\in L^q(0,T)$ функциялары үшін

$$\int_0^T I_{0|t}^{1-\alpha}g(t)\,f(t)\,dt=\int_0^T g(t)\,I_{t|T}^{1-\alpha}f(t)\,dt$$

теңдігі орынды.

1.1.18 - қасиет [31, 83 бет] Кез - келген $f(t)\in AC^{n+1}[0,T],\ n\ge 0$ функциясы үшін

$$(-1)^n \frac{d^n}{dt^n} D_{t|T}^{\alpha} f(t) = D_{t|T}^{\alpha+n} f(t)$$

теңдігі орынды. Мұндағы

$$AC^{n+1}[0,T] = \left\{ f:[0,T]\to R, \frac{d^n}{dt^n} \in AC[0,T] \right\}.$$

1.1.19 - лемма (Хаусдорф – Юнг теңсіздігі) [36, 165 бет] Айталық, $f(x)\in L^1(R^N)$ және $g(x)\in L^p(R^N),\ p\ge 1$ болсын. Онда $h(x)=f(x)*g(x)\in L^p(R^N)$ үшін

$$\|h(x)\|_{L^p(R^N)} \le \|f(x)\|_{L^1(R^N)} \cdot \|g(x)\|_{L^p(R^N)}$$

теңсіздігі орынды. Мұндағы $f(x)*g(x)=\int\limits_{R^N} f(x-y)g(y)dy$.

1.1.20 - қасиет [40] Кез - келген $0\le\alpha\le 1,\ p\ge 0$ және $f(x)\in C^2(R^N)$ функциясы үшін

$$(p+1) f^p(x)(-\Delta)^{\alpha} f(x) \ge (-\Delta)^{\alpha} f^{p+1}(x),\ \ x\in R^N$$

теңсіздігі орынды.

1.1.21 - лемма [41] Айталық $f(t)\in C^1([0,T])$ функциясы $t_0\in(0,T)$ нүктесінде максималды мәніне ие болсын. Онда

$$D_{0|t}^{\alpha} f(t_0) \ge \frac{t_0^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} f(t_0),\ 0<\alpha<1$$

теңсіздігі орынды. Егер $f(t_0)\ge 0$ болса, онда $D_{0|t}^{\alpha} f(t_0)\ge 0.$

1.1.22 - лемма Айталық $\varphi(t)=\left(1-\frac{t}{T}\right)^m,\ t\ge 0,\ T>0,\ m>1$ және $\alpha,\gamma\in(0,1)$ болсын. Онда

$$D_{t|T}^{1-\alpha}\varphi(t) = \frac{(m+\alpha)\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+\alpha+1)} T^{-(1-\alpha)} \left(1-\frac{t}{T}\right)^{m+\alpha-1}, \tag{1.1.1}$$

$$D_{t|T}^{2-\alpha}\varphi(t)=\frac{(m+\alpha-1)(m+\alpha)\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-\alpha+1)}T^{-(2-\alpha)}\left(1-\frac{t}{T}\right)^{m+\alpha-2}, \qquad (1.1.2)$$

$$\mathbf{D}_{t|T}^{1-\gamma}\left[D_{t|T}^{1-\alpha}\varphi\right](t)=\frac{\Gamma(m+\gamma)}{\Gamma(m+\alpha+1)}T^{-(2-\alpha-\gamma)}\left(1-\frac{t}{T}\right)^{m+\alpha+\gamma-2}, \qquad (1.1.3)$$

$$I_{t|T}^{1-\alpha}\varphi(t)=\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-\alpha+2)}T^{-(\alpha-1)}\left(1-\frac{t}{T}\right)^{m-\alpha+1}, \qquad (1.1.4)$$

$$\mathbf{D}_{t|T}^{1-\alpha}\varphi(t)=\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+\alpha)}T^{-(1-\alpha)}\left(1-\frac{t}{T}\right)^{m+\alpha-1} \qquad (1.1.5)$$

және

$$\left(D_{t|T}^{1-\alpha}\varphi\right)(T)=0,\quad \left(D_{t|T}^{1-\alpha}\varphi\right)(0)=\frac{(m+\alpha)\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+\alpha+1)}T^{-(1-\alpha)} \qquad (1.1.6)$$

теңдіктері орынды.

1.2 Риман - Лиувилль мағынасындағы бөлшек ретті туынды қатысқан диффузия теңдеуі үшін максимум қағидасы және оның қолданыстары

Бұл бөлімде келесі түрдегі бөлшек ретті диффузия теңдеуі

$$u_t(x,t)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}D_{0|t}^{1-\alpha}u(x,t)+F(x,t),\ (x,t)\in(0,a)\times(0,T]=\Omega \qquad (1.2.1)$$

үшін

$$\begin{cases} u(x,0)=\varphi(x),\ x\in[0,a], \\ u(0,t)=\lambda(t),\ \ u(a,t)=\mu(t),\ 0\le t\le T, \end{cases} \qquad (1.2.2)$$

бастапқы-шеттік есебі зерттеледі. Мұндағы $F(x,t),\ \varphi(x),\ \lambda(t),\ \mu(t)$ функциялары үздіксіз және $D_{0|t}^{1-\alpha}\lambda(t), D_{0|t}^{1-\alpha}\mu(t)\ge 0, t\in[0,T]$.

1.2.1 - лемма [41] Айталық $0<\alpha<1$ және $f(t)\in C^1[0,T]$ болсын.

а) Егер $f(t)$ функциясы $t_0\in[0,T]$ нүктесінде максимум мәніне ие болса, онда

$$D_{0|t}^{\alpha}f(t_0)\ge\frac{t_0^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}f(t_0) \qquad (1.2.3)$$

теңсіздігі орынды.

б) Егер $f(t)$ функциясы $t_0 \in [0,T]$ нүктесінде минимум мәніне ие болса, онда

$$D_{0|t}^{\alpha} f(t_0) \le \frac{t_0^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} f(t_0) \qquad (1.2.4)$$

теңсіздігі орынды.

1.2.2 - теорема Айталық, $u(x,t)$ функциясы (1.2.1) - (1.2.2) есебінің шешімі болсын. Егер кез - келген $(x,t) \in \bar{\Omega}$ нүктесі үшін $F(x,t) \ge 0$ болса, онда

$$u(x,t) \ge \min_{(x,t)\in\bar{\Omega}} \{\lambda(t), \mu(t), \varphi(x)\}, \; (x,t) \in \bar{\Omega}$$

теңсіздігі орынды болады.

Дәлелдеуі: Айталық

$$m = \min_{(x,t)\in\bar{\Omega}} \{\lambda(t), \mu(t), \varphi(x)\} \text{ және } \tilde{u}(x,t) = u(x,t) - m$$

болсын.

Онда (1.2.2) теңдік арқылы $\tilde{u}(x,t)$ функциясы үшін

$$\begin{cases} \tilde{u}(x,0) = \varphi(x) - m \ge 0, \; x \in [0,a], \\ \tilde{u}(0,t) = \lambda(t) - m \ge 0, \; \tilde{u}(a,t) = \mu(t) - m \ge 0, \; t \in [0,T], \end{cases} \qquad (1.2.5)$$

түріндегі бастапқы - шеттік шарттарын аламыз. Сонымен қатар,

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{u}(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}u(x,t) \text{ және } \frac{\partial^2}{\partial x^2} D_{0|t}^{1-\alpha}\tilde{u}(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} D_{0|t}^{1-\alpha}u(x,t)$$

болатындығы белгілі. Онда, $\tilde{u}(x,t)$ функциясы

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{u}(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} D_{0|t}^{1-\alpha}\tilde{u}(x,t) + F(x,t),$$

теңдеуін және (1.2.5) бастапқы - шеттік шарттарын қанағаттандырады.

Айталық, $\tilde{u}(x,t) < 0$ болатындай қандай да бір $(x,t) \in \bar{\Omega}$ нүктесі бар болсын. Онда, $(x,t) \in \{0,a\} \times [0,T] \cup [0,a] \times \{0\}$ облысында $\tilde{u}(x,t) \ge 0$ болғандықтан, $\tilde{u}(x,t)$ функциясы Ω облысында теріс минимум мән қабылдайтын $(x_0,t_0) \in \Omega$ нүкте бар болады. Онда, 1.2.1 - лемма бойынша

$$D_{0|t}^{1-\alpha}\tilde{u}(x_0,t_0) \le \frac{t_0^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\tilde{u}(x_0,t_0) < 0 \qquad (1.2.6)$$

теңсіздігі орындалады. Келесі $\omega(x,t)=D_{0|t}^{1-\alpha}\tilde{u}(x,t)$ белгілеуін енгізейік. Егер $t\to 0$ болса, онда $\omega(x,t)=D_{0|t}^{1-\alpha}\tilde{u}(x,t)=D_{0|t}^{1-\alpha}u(x,t)\to 0$ қатынас орынды.

Яғни, $D_{0|t}^{1-\alpha}\tilde{u}(x,0)=0$. Онда, $\tilde{u}(x,t)$ функциясының шекаралық мәндері бойынша $D_{0|t}^{1-\alpha}\tilde{u}(0,t)=D_{0|t}^{1-\alpha}\lambda(t)$ және $D_{0|t}^{1-\alpha}\tilde{u}(a,t)=D_{0|t}^{1-\alpha}\mu(t)$ болады. Сонымен қатар, $D_{0|t}^{1-\alpha}\lambda(t)\ge 0, t\in[0,T]$ және $D_{0|t}^{1-\alpha}\mu(t)\ge 0, t\in[0,T]$ екендігін ескерсек, онда $D_{0|t}^{1-\alpha}\tilde{u}(0,t)\ge 0$ және $D_{0|t}^{1-\alpha}\tilde{u}(a,t)\ge 0$ теңсіздіктері орынды болатындығы келіп шығады.

Онда $\omega(x,t)$ функциясы

$$\begin{cases} D_{0|t}^{\alpha}\omega(x,t)=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\omega(x,t)+F(x,t), \\ \omega(x,0)=0,\ x\in[0,a], \\ \omega(0,t)\ge 0,\ \omega(a,t)\ge 0,\ 0\le t\le T, \end{cases} \tag{1.2.7}$$

теңдеуін қанағаттандырады.

Олай болса (1.2.6) теңсіздігінен (x_0,t_0) нүктесінде $\omega(x_0,t_0)<0$ және Ω облысының шекарасында $\omega(x,t)\ge 0$ болатындығын аламыз. Онда $\omega(x,t)$ функциясының $\bar{\Omega}$ облысында теріс минимум мән қабылдайтын (x_1,t_1) нүктесі табылады.

1.2.1 - лемма бойынша $D_{0|t}^{\alpha}\omega(x_1,t_1)\le\dfrac{t_1^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\omega(x_1,t_1)<0$ және $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\omega(x_1,t_1)\ge 0$ теңсіздіктері орындалады. Онда, $\omega(x,t)$ функциясы (x_1,t_1) нүктесінде $D_{0|t}^{\alpha}\omega(x_1,t_1)<0$ және $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\omega(x_1,t_1)+F(x_1,t_1)\ge 0$ теңсіздіктерін қанағаттандырады.

Бұл қарама - қайшылық $\bar{\Omega}$ облысында $\tilde{u}(x,t)\ge 0$ екендігін көрсетеді.

Бұдан, $\bar{\Omega}$ облысында кез - келген m үшін $u(x,t)\ge m$ теңсіздігі орынды екендігі шығады.

1.2.3 - теорема Айталық, $u(x,t)$ функциясы (1.2.1)-(1.2.2) есебінің шешімі болсын. Егер $(x,t)\in\bar{\Omega}$ үшін $F(x,t)\le 0$ болса, онда

$$u(x,t)\le\max_{(x,t)\in\bar{\Omega}}\{\lambda(t),\mu(t),\varphi(x)\},$$

бағалауы орынды.

Жоғарыдағы 1.2.2 және 1.2.3 - теоремалардың нәтижелерінен келесі салдарларды алуға болады.

1.2.4 - салдар Айталық, $u(x,t)$ функциясы (1.2.1) - (1.2.2) есебінің шешімі болсын. Егер $(x,t)\in\bar{\Omega}$ үшін $F(x,t)\geq 0$ болса, онда кез - келген $(x,t)\in\bar{\Omega}$ үшін $u(x,t)\geq 0$ болады.

1.2.5 - салдар Айталық, $u(x,t)$ функциясы (1.2.1) - (1.2.2) есебінің шешімі болсын. Егер $(x,t)\in\bar{\Omega}$ үшін $F(x,t)\leq 0$ болса, онда кез - келген $(x,t)\in\bar{\Omega}$ үшін $u(x,t)\leq 0$ болады.

1.2.2 және 1.2.3 - теоремалардағы алынған нәтижелер классикалық жылу өткізгіштік теңдеуі үшін әлсіз максимум қағидасына ұқсас болып келеді. Алынған нәтижелерді (1.2.1) - (1.2.2) есебі шешімінің жалғыздығын дәлелдеуде қолдануға болады.

1.2.6 - теорема Егер (1.2.1) - (1.2.2) есебінің шешімі бар болса, онда ол жалғыз болады.

Дәлелдеуі: Айталық, $u_1(x,t)$ және $u_2(x,t)$ функциялары (1.2.1) - (1.2.2) есебінің шешімдері болсын. Онда $u_1(x,t)-u_2(x,t)$ функциясы

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(u_1(x,t)-u_2(x,t)\right)=\Delta_x D_{0|t}^{1-\alpha}\left(u_1(x,t)-u_2(x,t)\right)$$

теңдеуін және біртекті (1.2.2) бастапқы - шеттік шарттарын қанағаттандырады. Онда 1.2.2 және 1.2.3 - теоремалар бойынша $\bar{\Omega}$ облысында $u_1(x,t)-u_2(x,t)=0$ болатынын аламыз. Демек, $u_1(x,t)=u_2(x,t)$. Яғни (1.2.1) - (1.2.2) есебінің шешімі жалғыз.

Сонымен қатар, 1.2.2 және 1.2.3 - теоремалардың нәтижелері арқылы (1.2.1) - (1.2.2) есебі шешімінің бастапқы функциядан үздіксіз тәуелді болатындығын көрсетуге де болады.

1.2.7 - теорема Айталық $u(x,t)$ және $\bar{u}(x,t)$ функциялары (1.2.1) - (1.2.2) еебінің $\varphi(x)$ және $\bar{\varphi}(x)$ бастапқы шарттарына сәйкес келетін шешімдері болсын. Егер

$$\max_{x\in[0,a]}\left\{\left|\varphi(x)-\bar{\varphi}(x)\right|\right\}\leq\delta$$

болса, онда

$$\left|u(x,t)-\bar{u}(x,t)\right|\leq\delta$$

болады.

Дәлелдеуі: $\tilde{u}(x,t)=u(x,t)-\bar{u}(x,t)$ функциясы

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{u}(x,t)=\Delta_x D_{0|t}^{1-\alpha}\tilde{u}(x,t)$$

теңдеуін, $\tilde{u}(x,0)=\varphi(x)-\bar{\varphi}(x)$ бастапқы шартын және біртекті Дирихле шеттік шарттарын қанағаттандырады. Онда 1.2.2 - теорема және 1.2.3 - теорема нәтижелері бойынша келесі теңсіздікті аламыз

$$\left|\tilde{u}(x,t)\right| \le \max_{[0,a]}\left\{\left|\varphi(x)-\bar{\varphi}(x)\right|\right\}.$$

Теорема дәлелденді.

Енді уақыт бойынша бөлшек ретті бейсызықты диффузия теңдеуі

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)=\Delta_x D_{0|t}^{1-\alpha}u(x,t)+F(x,t,u),\ (x,t)\in(0,a)\times(0,T]=\Omega \qquad (1.2.8)$$

үшін

$$\begin{cases} u(x,0)=\varphi(x),\ x\in(0,a), \\ u(0,t)=u(a,t)=0,\ 0<t\le T, \end{cases} \qquad (1.2.9)$$

бастапқы-шеттік шарттарымен берілген есебін қарастырайық. Мұндағы $F(x,t,u)$ тегіс функция.

1.2.8 - теорема Айталық $F(x,t,u)$ функциясы u бойынша өспейтін функция болсын және (1.2.8) - (1.2.9) есебінің шешімі бар болсын, онда есептің шешімі жалғыз болады.

Дәлелдеуі. Айталық $u_1(x,t)$ және $u_2(x,t)$ функциялары (1.2.8) - (1.2.9) есебінің шешімдері болсын. Онда $v(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t)$ функциясы

$$\begin{cases} v_t(x,t)-\Delta_x D_{0|t}^{1-\alpha}v(x,t)=F(x,t,u_1)-F(x,t,u_2),\ (x,t)\in\Omega, \\ v(x,0)=0,\ 0<x<a, \\ v(0,t)=v(a,t)=0,\ t\in(0,T] \end{cases}$$

есебінің шешімі болады.

Орта мән теоремасы бойынша

$$F(x,t,u_2)-F(x,t,u_1)=\frac{\partial F}{\partial u}(u^*)(u_2-u_1)=-\frac{\partial F}{\partial u}(u^*)v,$$

болады. Мұндағы $(u^*)=(1-\mu)u_1+\mu u_2,\ \ 0\le\mu\le 1.$ Бұдан

$$v_t(x,t)-\Delta_x D_{0|t}^{1-\alpha}v(x,t)=-\frac{\partial F}{\partial u}(u^*)v$$

аламыз. Айталық $v(x,t)$ функциясы нөлден өзгеше болсын. Онда $v(x,t)$ функциясы Ω облысында оң максимум (теріс минимум) мән қабылдайды. $v(x,t)$ функциясы $(x_0,t_0)\in\Omega$ нүктесінде оң максимум мәнге ие болатындығын және $F(x,t,u)$ өспейтін функция екендігін, яғни $\frac{\partial F}{\partial u}(u^*)\le 0$ болатынын ескере отырып $-\frac{\partial F}{\partial u}(u^*)v(x_0,t_0)\ge 0$ теңсіздігін аламыз. Онда $v_t(x_0,t_0)-\Delta_x D_{0|t}^{1-\alpha}v(x_0,t_0)\ge 0$ болады. 1.2.2 - теорема және 1.2.3 - теорема нәтижелерін қолдану арқылы $u_1(x,t)=u_2(x,t)$ теңдігін аламыз. Яғни есептің шешімі жалғыз.

1.2.9 - теорема Айталық $u_1(x,t)$ және $u_2(x,t)$ функциялары (1.2.8) - (1.2.9) $u_1(x,0)=g_1(x)$ және $u_2(x,0)=g_2(x)$ бастапқы шарттарына сәйкес келетін шешімдері болсын. Егер $F(x,t,u)$ функциясы u бойынша өспейтін болса, онда

$$\|u_1(x,t)-u_2(x,t)\|_{\bar{\Omega}}\le\|g_1(x)-g_2(x)\|_{[0,a]}$$

бағалауы орынды.

Дәлелдеуі. Айталық, $v(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t)$ болсын. Онда $v(x,t)$ функциясы

$$\begin{cases} v_t(x,t)-\Delta_x D_{0|t}^{1-\alpha}v(x,t)=-\frac{\partial F}{\partial u}(u^*)v,\ (x,t)\in\Omega, \\ v(x,0)=g_1(x)-g_2(x),\ 0\le x\le a, \\ v(0,t)=v(a,t)=0,\ t\in(0,T] \end{cases}$$

есебінің шешімі болады. Айталық $M=\|g_1(x)-g_2(x)\|_{[0,a]}$ болсын, сондай-ақ 1.2.9 - теорема нәтижесі дұрыс емес деп кері жориық. Яғни, $\|u_1(x,t)-u_2(x,t)\|_{\bar{\Omega}}\nleq M$. Онда, v функциясы $(x_0,t_0)\in\Omega$ нүктесінде $v(x_0,t_0)=M_1>M$ болатын оң максимум мәнін немесе $(x_0,t_0)\in\Omega$ нүктесінде $v(x_0,t_0)=M_2<-M$ болатын теріс минимум мәнін қабылдайды. Егер $v(x_0,t_0)=M_1>M$ болса, v функциясының бастапқы - шеттік шарттарын қолданып $(x_0,t_0)=\Omega$ екендігін аламыз. Ары қарай 1.2.2 және 1.2.3 - теоремаларды пайдаланып $\|v(x,t)\|\le M$ теңсіздігін аламыз.

1.3 Капуто - Фабрицио бөлшек ретті туындысы қатысқан диффузия теңдеуі үшін максимум қағидасы және оның қолданыстары

Бұл бөлімде уақыт бойынша бөлшек ретті диффузия теңдеуі

$$u_t(x,t)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,{}_{CF}\mathbf{D}_{0|t}^{1-\alpha}u(x,t)+F(x,t),\ (x,t)\in(0,a)\times(0,T]=\Omega \qquad (1.3.1)$$

үшін

$$\begin{cases} u(x,0)=\varphi(x),\ x\in[0,a], \\ u(0,t)=u(a,t)=0,\ 0\le t\le T, \end{cases} \tag{1.3.2}$$

бастапқы - шеттік есебі қарастырылады. Мұндағы $F(x,t),\ \varphi(x)$ функциялары үздіксіз және $\varphi(0)=\varphi(a)=0$.

1.3.1 - лемма [42] Айталық $0<\alpha<1$ және $f(t)\in H^1(0,T)$ функциясының $f'(t)$ туындысы бар және кез - келген $t\in[0,T]$ нүктесінде үздіксіз болсын.

а) Егер $f(t)$ функциясы $t_0\in[0,T]$ нүктесінде максимум мәніне ие болса, онда

$$ {}_{CF}\mathbf{D}_{0|t}^{\alpha} f(t_0)\ge \frac{1}{1-\alpha} e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}t_0}\left(f(t_0)-f(0)\right)\ge 0 \tag{1.3.3}$$

теңсіздігі орынды.

б) Егер $f(t)$ функциясы $t_0\in[0,T]$ нүктесінде минимум мәніне ие болса, онда

$$ {}_{CF}\mathbf{D}_{0|t}^{\alpha} f(t_0)\le \frac{1}{1-\alpha} e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}t_0}\left(f(t_0)-f(0)\right)\le 0 \tag{1.3.4}$$

теңсіздігі орынды.

Дәлелдеуі: Лемманың а) бөлігін дәлелдеу үшін

$$g(t)=f(t_0)-f(t),\ t\in[0,T]$$

көмекші $g(t)\in H^1(0,T)$ функциясын енгіземіз. Онда $[0,T]$ кесіндісіндегі кез-келген t нүктесі үшін $g(t)\ge 0$ болатындығы белгілі. Сонымен қатар, келесі теңдіктер де орынды:

$$g(t_0)=g'(t_0)=0 \text{ және } \left({}_{CF}\mathbf{D}_{0|t}^{\alpha} g\right)(t)=-\left({}_{CF}\mathbf{D}_{0|t}^{\alpha} f\right)(t).$$

$g(t)$ функциясы $H^1(0,T)$ класынан болғандықтан, $g'(t)$ интегралданатын функция болып табылады. Онда бөліктеп интегралдау әдісі бойынша

$$ {}_{CF}\mathbf{D}_{0|t}^{\alpha} g(t_0)=\frac{1}{1-\alpha}\int_0^{t_0} g'(\tau)e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t_0-\tau)}d\tau=$$

$$=\frac{1}{1-\alpha}\left(e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t_0-\tau)}\,g(\tau)\Big|_0^{t_0}\right)-\frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}\int_0^{t_0} g(\tau)e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t_0-\tau)}d\tau=$$

$$=\frac{1}{1-\alpha}\left(g\left(t_0\right)-e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}t_0}g\left(0\right)\right)-\frac{\alpha}{\left(1-\alpha\right)^2}\int_0^{t_0}g\left(\tau\right)e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}\left(t_0-\tau\right)}d\tau$$

теңдігін аламыз. Сондай-ақ $g\left(t\right)$ функциясы $\left[0,T\right]$ аралығында теріс емес болғандықтан соңғы теңдіктегі интегралдың да теріс емес екендігі шығады. Онда

$${}_{CF}\mathbf{D}_{0|t}^{\alpha}g\left(t_0\right)\le\frac{1}{1-\alpha}\left(g\left(t_0\right)-e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}t_0}g\left(0\right)\right)\le$$

$$\le-\frac{1}{1-\alpha}e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}t_0}g\left(0\right)\le-\frac{1}{1-\alpha}e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}t_0}\left(f\left(t_0\right)-f\left(0\right)\right)$$

теңсіздігі орынды. $\left({}_{CF}\mathbf{D}_{0|t}^{\alpha}g\right)\left(t\right)=-\left({}_{CF}\mathbf{D}_{0|t}^{\alpha}f\right)\left(t\right)$ теңдігін негізге алып,

$$-{}_{CF}\mathbf{D}_{0|t}^{\alpha}f\left(t_0\right)\le-\frac{1}{1-\alpha}e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}t_0}\left(f\left(t_0\right)-f\left(0\right)\right)$$

теңсіздігі де орынды болатындығын аламыз.

Дәлелдеу қажеті де осы болатын.

Сәйкесінше, жоғарыдағы есептеулерді $-f\left(t\right)$ функциясына қолдану арқылы Лемманың б) бөлігі дәлелденеді.

1.3.2 - теорема Айталық, $u\left(x,t\right)$ функциясы (1.3.1) - (1.3.2) есебінің регуляр шешімі болсын. Егер $\left(x,t\right)\in\bar{\Omega}$ үшін $F\left(x,t\right)\ge0$ болса, онда кез - келген $\left(x,t\right)\in\bar{\Omega}$ үшін $u\left(x,t\right)\ge0$ орынды болады.

Дәлелдеуі: Айталық кез - келген $\varepsilon>0$ саны үшін, көмекші функция

$$v\left(x,t\right)=u\left(x,t\right)+\varepsilon t$$

енгізейік. Онда осы көмекші функция үшін (1.3.2) бастапқы-шеттік шарттар келесі түрде өрнектеледі:

$$\begin{cases}v_t\left(x,t\right)=u_t\left(x,t\right)+\varepsilon,\\ v\left(0,t\right)=v\left(a,t\right)=\varepsilon t>0,\quad t>0,\\ v\left(x,0\right)=\varphi\left(x\right),\quad x\in\left[0,a\right].\end{cases}$$

$v\left(x,t\right)$ функциясына ${}_{CF}\mathbf{D}_{0|t}^{1-\alpha}$ операторын қолдану арқылы

$${}_{CF}\mathbf{D}_{0|t}^{1-\alpha}\varepsilon t=\frac{1}{\alpha}\int_0^t\varepsilon e^{-\frac{1-\alpha}{\alpha}\left(t-\tau\right)}d\tau=\frac{\varepsilon}{1-\alpha}\left[1-e^{-\frac{1-\alpha}{\alpha}t}\right]$$

болатынын ескеріп

$$ {}_{CF}\mathbf{D}_{0|t}^{1-\alpha}v\left(x,t\right)={}_{CF}\mathbf{D}_{0|t}^{1-\alpha}u\left(x,t\right)+{}_{CF}\mathbf{D}_{0|t}^{1-\alpha}\varepsilon t={}_{CF}\mathbf{D}_{0|t}^{1-\alpha}u\left(x,t\right)+\frac{\varepsilon}{1-\alpha}\left[1-e^{-\frac{1-\alpha}{\alpha}t}\right] $$

өрнегін аламыз.

Жоғарыда алынған нәтижеге $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ операторын қолдану арқылы

$$ \frac{\partial^2}{\partial x^2}\,{}_{CF}\mathbf{D}_{0|t}^{1-\alpha}v\left(x,t\right)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,{}_{CF}\mathbf{D}_{0|t}^{1-\alpha}u\left(x,t\right) $$

теңдігі орынды болатындығын аламыз. Онда $v\left(x,t\right)$ функциясы

$$ \begin{cases} v_t\left(x,t\right)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,{}_{CF}\mathbf{D}_{0|t}^{1-\alpha}v\left(x,t\right)+F\left(x,t\right)+\varepsilon, \\ v\left(x,0\right)=\varphi\left(x\right)\geq 0,\ x\in\left[0,a\right], \\ v\left(0,t\right)=v\left(a,t\right)=\varepsilon t,\ t\geq 0 \end{cases} $$

есебінің шешімі болады.

Олай болса (1.3.4) теңсіздігінен $\left(x_0,t_0\right)$ нүктесінде $v\left(x_0,t_0\right)<0$ және Ω облысының шекарасында $v\left(x,t\right)\geq 0$ болатындығын аламыз. Онда $v\left(x,t\right)$ функциясының $\bar{\Omega}$ облысында теріс минимум мән қабылдайтын $\left(x_0,t_0\right)$ нүктесі табылады. Онда 1.3.1 - лемманың б) бөлігі бойынша $\left(x_0,t_0\right)$ нүктесінде

$$ {}_{CF}\mathbf{D}_{0|t}^{1-\alpha}v\left(x_0,t_0\right)\leq\frac{1}{\alpha}e^{-\frac{1-\alpha}{\alpha}t_0}\left(v\left(x_0,t_0\right)-v\left(x_0,0\right)\right)= $$

$$ =\frac{1}{\alpha}e^{-\frac{1-\alpha}{\alpha}t_0}\left(v\left(x_0,t_0\right)-\varphi\left(x_0\right)\right)\leq\frac{1}{\alpha}e^{-\frac{1-\alpha}{\alpha}t_0}v\left(x_0,t_0\right)<0 \qquad (1.3.5) $$

теңсіздігі орынды.

Келесі $\omega\left(x,t\right)={}_{CF}\mathbf{D}_{0|t}^{1-\alpha}v\left(x,t\right)$ белгілеуін енгізейік.

$v\left(x,t\right)$ функциясы $t>0$ бойынша үзіліссіз дифференциалданатындығын ескеріп, $t\to 0$ болса, онда

$$ {}_{CF}\mathbf{D}_{0|t}^{1-\alpha}v\left(x,t\right)=\frac{1}{\alpha}\int_0^t v'\left(x,\tau\right)e^{-\frac{1}{1-\alpha}\left(t-\tau\right)}d\tau\to 0 \qquad (1.3.6) $$

қатынасы орынды екендігін аламыз.
1.1.6 - қасиет бойынша

$$\frac{\partial}{\partial t}\,{}_{CF}\mathbf{I}_{0|t}^{1-\alpha}\,{}_{CF}\mathbf{D}_{0|t}^{1-\alpha}v(x,t)=\frac{\partial}{\partial t}v(x,t)$$

және 1.1.5 - анықтама негізінде

$${}_{CF}\mathbf{I}_{0|t}^{1-\alpha}\omega(x,t)=\alpha\cdot\omega(x,t)+(1-\alpha)\int_0^t\omega(x,\tau)\,d\tau$$

теңдіктері орынды болады. Онда кез - келген $t>0$ үшін

$$\frac{\partial}{\partial t}\,{}_{CF}\mathbf{I}_{0|t}^{1-\alpha}\omega(x,t)=\alpha\cdot\omega_t(x,t)+(1-\alpha)\omega(x,t)$$

теңдігі орынды.
Тікелей есептеу жүргізу арқылы

$${}_{CF}\mathbf{D}_{0|t}^{1-\alpha}u(x,t)=\frac{1}{\alpha}\left[u(x,t)-e^{-\frac{1-\alpha}{\alpha}t}\varphi(x)\right]-\frac{1-\alpha}{\alpha^2}\int_0^t e^{-\frac{1-\alpha}{\alpha}(t-\tau)}u(x,\tau)d\tau,\ t>0 \qquad (1.3.7)$$

нәтижесіне қол жеткіземіз.

Егер $t\to 0^+$ болса, онда ${}_{CF}\mathbf{D}_{0|t}^{1-\alpha}u(x,t)\to 0$ қатынасы орынды. Бұдан,

$$\omega(x,t)={}_{CF}\mathbf{D}_{0|t}^{1-\alpha}v(x,t)={}_{CF}\mathbf{D}_{0|t}^{1-\alpha}u(x,t)+\frac{\varepsilon}{1-\alpha}\left[1-e^{-\frac{1-\alpha}{\alpha}t}\right]=0,\ t\to 0^+$$

теңдігін аламыз.
$v(x,t)$ функциясының шеттік шарттары бойынша келесі теңсіздік орынды:

$${}_{CF}\mathbf{D}_{0|t}^{1-\alpha}v(0,t)={}_{CF}\mathbf{D}_{0|t}^{1-\alpha}v(a,t)=\frac{\varepsilon}{1-\alpha}\left[1-e^{-\frac{1-\alpha}{\alpha}t}\right]\geq 0,\ \ t\geq 0.$$

Онда, $\omega(x,t)$ функциясы

$$\begin{cases}\alpha\omega_t(x,t)+(1-\alpha)\omega(x,t)=\omega_{xx}(x,t)+F(x,t),\\ \omega(0,t)=\omega(a,t)\geq 0,\ 0\leq t\leq T,\\ \omega(x,0)=0,\ x\in[0,a]\end{cases}$$

есебінің шешімі болады.

Парболалық теңдеулер үшін максимум қағидасы [43] бойынша $[0,a]\times[0,T]$ аймағында $\omega(x,t)\geq 0$ болатындығы белгілі. Ал бұл қарама - қайшылық $[0,a]\times[0,T]$ облысында $v(x,t)\geq 0$ екендігін көрсетеді. Бұдан, $[0,a]\times[0,T]$ аймағында кез - келген $\varepsilon>0$ саны үшін $u(x,t)\geq -\varepsilon t$ екендігі шығады. ε параметрі теріс емес сан болғандықтан $[0,a]\times[0,T]$ облысында $u(x,t)\geq 0$ болатындығын аламыз.

1.3.3 - теорема Айталық, $u(x,t)$ функциясы (1.3.1) - (1.3.2) есебінің шешімі болсын. Егер $(x,t)\in\bar{\Omega}$ үшін $F(x,t)\leq 0$ болса, онда кез - келген $(x,t)\in\bar{\Omega}$ үшін $u(x,t)\leq 0$ болады.

1.3.4 - теорема Айталық, $u(x,t)$ функциясы (1.3.1) теңдеуінің $\varphi(x)$ бастапқы және ξ_1, $\xi_2\in R$ шеттік шарттарын қанағаттандыратын шешімі болсын.
Егер $(x,t)\in\bar{\Omega}$ аймағында $F(x,t)\geq 0$ болса, онда

$$u(x,t)\geq \min_{x\in[0,a]}\{\xi_1,\xi_2,\varphi(x)\}$$

орынды болады.

Дәлелдеуі: Айталық

$$m=\min_{x\in[0,a]}\{\xi_1,\xi_2,\varphi(x)\} \text{ және } \tilde{u}(x,t)=u(x,t)-m$$

болсын. Онда, $\tilde{u}(x,t)$ функциясы үшін

$$\begin{gathered}\tilde{u}(0,t)=\xi_1-m\geq 0,\ \tilde{u}(a,t)=\xi_2-m\geq 0,\ t\in[0,T],\\ \tilde{u}(x,0)=\varphi(x)-m\geq 0,\ \ x\in[0,a]\end{gathered} \tag{1.3.8}$$

бастапқы - шеттік шарттарын аламыз. Сонымен қатар,

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{u}(x,t)=\frac{\partial}{\partial t}u(x,t),\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}\,{}_{CF}\mathbf{D}_{0|t}^{1-\alpha}\tilde{u}(x,t)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,{}_{CF}\mathbf{D}_{0|t}^{1-\alpha}u(x,t)$$

болатындығы белгілі. Онда, $\tilde{u}(x,t)$ функциясы

$$u_t(x,t)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,{}_{CF}\mathbf{D}_{0|t}^{1-\alpha}u(x,t)+F(x,t)$$

теңдеуін және (1.3.8) бастапқы - шеттік шарттарын қанағаттандырады

1.3.2 - теореманың дәлелдеуіне ұқсас есептеулер бойынша $(x,t)\in[0,a]\times[0,T]$ аймағында $\tilde{u}(x,t)\ge 0$ орынды болатындығын аламыз. Бұдан, кез - келген $(x,t)\in\bar{\Omega}$ нүктесінде

$$u(x,t)\ge \min_{x\in[0,a]}\{\xi_1,\xi_2,\varphi(x)\}$$

теңсіздігі орынды болатыны шығады.

Егер $\tilde{u}(x,t)=-u(x,t)$ деп белгілесек, онда дәлелдеуі 1.3.4 - теоремаға ұқсас болатын келесі нәтижені алуға болады.

1.3.5 - теорема Айталық, $u(x,t)$ функциясы (1.3.1) теңдеуінің $\varphi(x)$ бастапқы және ξ_1, $\xi_2\in R$ шеттік шарттарын қанағаттандыратын шешімі болсын.
Егер $(x,t)\in[0,a]\times[0,T]$ аймағында $F(x,t)\le 0$ болса, онда

$$u(x,t)\le \max_{x\in[0,a]}\{\xi_1,\xi_2,\varphi(x)\}$$

теңсіздігі орынды.

1.3.4 және 1.3.5 - теоремаларда алынған нәтижелер классикалық жылу өткізгіштік теңдеуі үшін әлсіз максимум қағидасына ұқсас болып келеді. Алынған нәтижелерді (1.3.1) - (1.3.2) есебі шешімінің жалғыздығын дәлелдеуде қолдануға болады.

1.3.6 - теорема Егер (1.3.1) - (1.3.2) есебінің шешімі бар болса, онда ол жалғыз болады.

Дәлелдеуі: Айталық, $u_1(x,t)$ және $u_2(x,t)$ функциялары (1.3.1) - (1.3.2) есебінің шешімдері болсын. Онда $u_1(x,t)-u_2(x,t)$ функциясы

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(u_1(x,t)-u_2(x,t)\right)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,{}_{CF}\mathbf{D}_{0|t}^{1-\alpha}\left(u_1(x,t)-u_2(x,t)\right)$$

теңдеуін және біртекті (1.3.2) бастапқы - шеттік шарттарын қанағаттандырады. Онда 1.3.4 және 1.3.5 - теоремалар бойынша $\bar{\Omega}$ облысында $u_1(x,t)-u_2(x,t)=0$ болатынын аламыз. Демек, $u_1(x,t)=u_2(x,t)$. Яғни (1.3.1) - (1.3.2) есебінің шешімі жалғыз.

Сонымен қатар, 1.3.4 және 1.3.5 - теоремалардың нәтижелері арқылы (1.3.1) - (1.3.2) есебі шешімінің бастапқы функциядан үздіксіз тәуелді болатындығын көрсетуге де болады.

1.3.7 - теорема Айталық $u(x,t)$ және $\tilde{u}(x,t)$ функциялары (1.3.1) - (1.3.2) есебінің $\varphi(x)$ және $\tilde{\varphi}(x)$ бастапқы шарттарына сәйкес келетін шешімдері болсын. Егер

$$\max_{x\in[0,a]}\left\{\left|\varphi(x)-\tilde{\varphi}(x)\right|\right\}\le\delta$$

болса, онда

$$\left|u(x,t)-\tilde{u}(x,t)\right|\le\delta$$

орынды болады.
Дәлелдеуі: $v(x,t)=u(x,t)-\tilde{u}(x,t)$ функциясы

$$\frac{\partial}{\partial t}v(x,t)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,{}_{CF}\mathbf{D}_{0|t}^{1-\alpha}v(x,t)$$

теңдеуін, $v(x,0)=\varphi(x)-\tilde{\varphi}(x)$ бастапқы шартын және біртекті Дирихле шеттік шарттарын қанағаттандырады. Онда, 1.3.4 - теорема және 1.3.5 - теорема нәтижелері бойынша келесі теңсіздікті аламыз:

$$\left|v(x,t)\right|\le\max_{x\in[0,a]}\left\{\left|\varphi(x)-\tilde{\varphi}(x)\right|\right\}.$$

Теорема дәлелденді.

1.4 Жалпыланған Капуто - Фабрицио бөлшек ретті туындысы қатысқан диффузия теңдеуі үшін максимум қағидасы және оның қолданыстары

Бұл бөлімде бөлшек ретті диффузия теңдеуі

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,{}_{CF}^{*}\mathbf{D}_{0|t}^{1-\alpha}u(x,t)+F(x,t),\ (x,t)\in(0,a)\times(0,T]=\Omega \tag{1.4.1}$$

үшін

$$\begin{cases}u(x,0)=\varphi(x),\ x\in[0,a],\\ u(0,t)=\lambda(t),\ u(a,t)=\mu(t),\ 0\le t\le T\end{cases} \tag{1.4.2}$$

бастапқы-шеттік есебі зерттеледі [44, 45]. Мұндағы $F(x,t,u),\varphi(x),\lambda(t),\mu(t)$ функциялары үздіксіз және $\lambda(t),\ \mu(t)$ кемімейтін функциялар.

1.4.1 - лемма [46] Айталық $f(t)\in C^1([a,b])$ және $0<\alpha<1$ болсын.

а) Егер $f(t)$ фунциясы $t_0\in[0,T]$ нүктесінде максимал мәніне ие болса, онда

$$ {}_{CF}^{*}\mathbf{D}_{0|t}^{\alpha}f(t_0)\ge\frac{1}{1-\alpha}E_{\alpha,1}\left[-\alpha\frac{t_0^{\alpha}}{1-\alpha}\right]\left(f(t_0)-f(0)\right)\ge0 \tag{1.4.3}$$

теңсіздігі орынды.

б) Егер $f(t)$ фунциясы $t_0 \in [0,T]$ нүктесінде минимал мәніне ие болса, онда

$$ {}_{CF}^{\;*}\mathbf{D}_{0|t}^{\alpha} f(t_0) \le \frac{1}{1-\alpha} E_{\alpha,1}\left[-\alpha \frac{t_0^{\alpha}}{1-\alpha}\right]\left(f(t_0)-f(0)\right) \le 0 \qquad (1.4.4) $$

теңсіздігі орынды.

Д ә л е л д е у і : Лемманың а) бөлігін дәлелдеу үшін

$$ g(t) = f(t_0) - f(t), \;\; t \in [0,T] $$

көмекші $g(t) \in C^1(0,T)$ функциясын енгіземіз.

Онда $[0,T]$ кесіндісіндегі кез-келген t нүктесі үшін $g(t) \ge 0$ екендігі белгілі.

Сонымен қатар, келесі теңдіктер де орынды:

$$ g(t_0) = g'(t_0) = 0 \text{ және } {}_{CF}^{\;*}\mathbf{D}_{0|t}^{\alpha} g(t) = -{}_{CF}^{\;*}\mathbf{D}_{0|t}^{\alpha} f(t). $$

$g(t)$ функциясы $C^1(0,T)$ класынан болғандықтан $g'(t)$ интегралданатын функция болып табылады. Демек, 1.1.10 - қасиет бойынша

$$ {}_{CF}^{\;*}\mathbf{D}_{0|t}^{\alpha} g(t_0) = \frac{1}{1-\alpha}\left(g(t_0) - E_{\alpha,1}\left[-\alpha \frac{t_0^{\alpha}}{1-\alpha}\right] g(0)\right) - $$

$$ -\frac{\alpha}{(1-\alpha)^2} \int_0^{t_0} g(\tau)(t_0-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left[-\alpha \frac{(t_0-\tau)^{\alpha}}{1-\alpha}\right] d\tau $$

теңдігі орынды.

Миттаг-Леффлер $E_{\alpha,1}(-\tau)$ функциясы $\tau \in (0,\infty)$ үшін монотонды функция [47] және $E_{\alpha,\alpha}(-\tau)$ функциясы $\tau \in (0,\infty)$ аралығында $E_{\alpha,\alpha}(-\tau) > 0$ екендігі [48] белгілі. Сонымен қатар, $g(t)$ функциясы $[0,T]$ кесіндісінде теріс емес болғандықтан соңғы теңдіктегі интегралдың да мәні теріс емес екендігін аламыз. Онда,

$$ {}_{CF}^{\;*}\mathbf{D}_{0|t}^{\alpha} g(t_0) \le \frac{1}{1-\alpha}\left(g(t_0) - E_{\alpha,1}\left[-\alpha \frac{t_0^{\alpha}}{1-\alpha}\right] g(0)\right) = $$

$$ = -\frac{1}{1-\alpha} E_{\alpha,1}\left[-\alpha \frac{t_0^{\alpha}}{1-\alpha}\right] g(0) = -\frac{1}{1-\alpha} E_{\alpha,1}\left[-\alpha \frac{t_0^{\alpha}}{1-\alpha}\right]\left(f(t_0)-f(0)\right) $$

теңсіздігі орынды.

${}_{CF}^{\ *}\mathbf{D}_{0|t}^{\alpha} g(t) = -{}_{CF}^{\ *}\mathbf{D}_{0|t}^{\alpha} f(t)$ теңдігін негізге алып,

$$ {}_{CF}^{\ *}\mathbf{D}_{0|t}^{\alpha} f(t_0) \geq \frac{1}{1-\alpha} E_{\alpha,1}\left[-\alpha \frac{t_0^{\alpha}}{1-\alpha}\right]\left(f(t_0) - f(0)\right) $$

теңсіздігі орынды болатындығын алымыз.

Жоғарыдағы есептеулерді $-f(t)$ функциясына қолдану арқылы Лемманың б) бөлігі дәлелденеді.

1.4.2 - теорема Айталық, $u(x,t)$ функциясы (1.4.1) - (1.4.2) есебінің регуляр шешімі болсын. Егер кез - келген $(x,t) \in \bar{\Omega}$ үшін $F(x,t) \geq 0$ болса, онда

$$ u(x,t) \geq \min_{(x,t)\in\bar{\Omega}} \left\{\lambda(t), \mu(t), \varphi(x)\right\}, \ (x,t) \in \bar{\Omega} $$

теңсіздігі орынды.

Дәлелдеуі: Айталық

$$ m = \min_{(x,t)\in\bar{\Omega}} \left\{\lambda(t), \mu(t), \varphi(x)\right\} \text{ және } \tilde{u}(x,t) = u(x,t) - m $$

болсын. Онда (1.4.2) бойынша $\tilde{u}(x,t)$ функциясы үшін

$$ \begin{cases} \tilde{u}(x,0) = \varphi(x) - m \geq 0, \ x \in [0,a], \\ \tilde{u}(0,t) = \lambda(t) - m \geq 0, \ \tilde{u}(a,t) = \mu(t) - m \geq 0, \ t \in [0,T] \end{cases} \tag{1.4.5} $$

бастапқы - шеттік шарттарын аламыз. Сонымен қатар,

$$ \frac{\partial}{\partial t}\tilde{u}(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}u(x,t) \text{ және } \frac{\partial^2}{\partial x^2}\, {}_{CF}^{\ *}\mathbf{D}_{0|t}^{1-\alpha}\tilde{u}(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\, {}_{CF}^{\ *}\mathbf{D}_{0|t}^{1-\alpha}u(x,t) $$

болатындығы белгілі. Онда $\tilde{u}(x,t)$ функциясы

$$ \frac{\partial}{\partial t}\tilde{u}(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\, {}_{CF}^{\ *}\mathbf{D}_{0|t}^{1-\alpha}\tilde{u}(x,t) + F(x,t) $$

теңдеуін және (1.4.5) бастапқы - шеттік шарттарын қанағаттандырады.

Айталық, $\tilde{u}(x,t) < 0$ болатындай қандай да бір $(x,t) \in \bar{\Omega}$ нүктесі бар болсын. Онда, $(x,t) \in \{0,a\} \times [0,T] \cup [0,a] \times \{0\}$ облысында $\tilde{u}(x,t) \geq 0$ болғандықтан, $\tilde{u}(x,t)$ функциясы Ω облысында теріс минимум мән қабылдайтын $(x_0,t_0) \in \Omega$ нүкте бар болады. Онда, 1.4.1 - лемма бойынша

$$ {}_{CF}^{\;*}\mathbf{D}_{0|t}^{\alpha}\tilde{u}(x,t) \le \frac{1}{1-\alpha} E_{\alpha,1}\left[-\alpha\frac{t_0^{\alpha}}{1-\alpha}\right]\left(\tilde{u}(x_0,t_0)-\tilde{u}(x_0,0)\right) = $$

$$ = \frac{1}{1-\alpha} E_{\alpha,1}\left[-\alpha\frac{t_0^{\alpha}}{1-\alpha}\right]\left(\tilde{u}(x_0,t_0)-\varphi(x_0)\right) \le \frac{1}{1-\alpha} E_{\alpha,1}\left[-\alpha\frac{t_0^{\alpha}}{1-\alpha}\right]\tilde{u}(x_0,t_0) < 0 \quad (1.4.6) $$

теңсіздігі орындалады. Келесі

$$ \omega(x,t) = {}_{CF}^{\;*}\mathbf{D}_{0|t}^{1-\alpha}\tilde{u}(x,t) $$

белгілеуін енгізейік.
Онда $\tilde{u}(x,t)$ функциясы $\bar{\Omega}$ облысында шенелгендігін ескеріп және 1.1.10 - қасиеті арқылы

$$ {}_{CF}^{\;*}\mathbf{D}_{0|t}^{1-\alpha}\tilde{u}(x,t) = {}_{CF}^{\;*}\mathbf{D}_{0|t}^{1-\alpha}u(x,t) = \frac{1}{\alpha}\left(u(x,t) - E_{1-\alpha,1}\left[-(1-\alpha)\frac{t^{1-\alpha}}{\alpha}\right]u(x,0)\right) - $$

$$ -\frac{1-\alpha}{\alpha^2}\int_0^t u(x,\tau)(t-\tau)^{-\alpha} E_{\alpha,\alpha}\left[-(1-\alpha)\frac{(t-\tau)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]d\tau \to 0, \text{егер } t\to 0 \quad (1.4.5) $$

теңдігін аламыз.
1.1.9 – қасиеті негізінде

$$ \frac{\partial}{\partial t}\,{}_{CF}^{\;*}\mathbf{I}_{0|t}^{1-\alpha}\left[{}_{CF}^{\;*}\mathbf{D}_{0|t}^{1-\alpha}\tilde{u}\right](x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\tilde{u}(x,t) $$

нәтижесін аламыз. Онда 1.1.8 - анықтама бойынша

$$ {}_{CF}^{\;*}\mathbf{I}_{0|t}^{1-\alpha}\omega(x,t) = \alpha\cdot\omega(x,t) + (1-\alpha) I_{0|t}^{1-\alpha}\omega(x,t) $$

орынды. Осы секілді 1.1.9 - анықтама арқылы

$$ \frac{\partial}{\partial t}\,{}_{CF}^{\;*}\mathbf{I}_{0|t}^{1-\alpha}\omega(x,t) = \alpha\cdot\frac{\partial}{\partial t}\omega(x,t) + (1-\alpha) D_{0|t}^{\alpha}\omega(x,t) $$

теңдігі орынды болады.
1.1.10 – қасиеті бойынша және тікелей есептеу нәтижесінде келесі теңдікті аламыз:

$$ {}_{CF}^{\;*}\mathbf{D}_{0|t}^{1-\alpha}u(x,t) = \frac{1}{\alpha}\left(u(x,t) - E_{1-\alpha,1}\left[-(1-\alpha)\frac{t^{1-\alpha}}{\alpha}\right]u(x,0)\right) - $$

$$-\frac{1-\alpha}{\alpha^2}\int_0^t u(x,\tau)(t-\tau)^{-\alpha} E_{\alpha,\alpha}\left[-(1-\alpha)\frac{(t-\tau)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]d\tau. \qquad (1.4.6)$$

Онда $u(x,t)$ функциясының үзіліссіздігінен (1.4.6) теңдікте $t\to 0^+$ болғанда теңдіктің оң жағы 0-ге ұмтылады, яғни ${}_{AB}D_{0|t}^{1-\alpha}u(x,0)=0.$
Егер $t\to 0^+$, онда

$$\omega(x,t)={}_{CF}^{\ *}\mathbf{D}_{0|t}^{1-\alpha}\tilde{u}(x,t)={}_{CF}^{\ *}\mathbf{D}_{0|t}^{1-\alpha}u(x,t)=0$$

орынды. $\tilde{u}(x,t)$ функциясының шекаралық мәндерін ескеріп

$${}_{CF}^{\ *}\mathbf{D}_{0|t}^{1-\alpha}\tilde{u}(0,t)={}_{CF}^{\ *}\mathbf{D}_{0|t}^{1-\alpha}\lambda(t)$$

және

$${}_{CF}^{\ *}\mathbf{D}_{0|t}^{1-\alpha}\tilde{u}(a,t)={}_{CF}^{\ *}\mathbf{D}_{0|t}^{1-\alpha}\mu(t)$$

аламыз. Сонымен қатар, $\lambda(t)$ және $\mu(t)$ кемімейтін функциялар екендігін ескерсек, онда $t\in(0,T)$ үшін $\lambda'(t)\ge 0,\ \mu'(t)\ge 0$ теңсіздіктері орынды болатындығы келіп шығады. Демек, ${}_{CF}^{\ *}\mathbf{D}_{0|t}^{1-\alpha}\tilde{u}(0,t)\ge 0$ және ${}_{CF}^{\ *}\mathbf{D}_{0|t}^{1-\alpha}\tilde{u}(a,t)\ge 0$ теңсіздіктері орынды.
Онда $\omega(x,t)$ функциясы

$$\begin{cases}\alpha\dfrac{\partial\omega}{\partial t}(x,t)+(\alpha-1)D_{0|t}^{\alpha}\omega(x,t)=\dfrac{\partial^2\omega}{\partial x^2}(x,t)+F(x,t),\\ \omega(x,0)=0,\ x\in[0,a],\\ \omega(0,t)\ge 0,\ \omega(a,t)\ge 0,\ 0\le t\le T\end{cases}$$

есебін қанағаттандырады.
Олай болса (1.4.4) теңсіздігінен (x_0,t_0) нүктесінде $\omega(x_0,t_0)<0$ және Ω облысының шекарасында $\omega(x,t)\ge 0$ болатындығын аламыз. Онда $\omega(x,t)$ функциясының $\bar{\Omega}$ облысында теріс минимум мән қабылдайтын (x_1,t_1) нүктесі табылады.

1.1.21 - лемма бойынша $D_{0|t}^{\alpha}\omega(x_1,t_1)\le\dfrac{t_1^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\omega(x_1,t_1)<0$ болатыны белгілі. Ал $\omega(x_1,t_1)$ локал минимум болғандықтан, $\dfrac{\partial\omega}{\partial t}(x_1,t_1)=0$ және $\dfrac{\partial^2\omega}{\partial x^2}(x_1,t_1)\ge 0$ орындалады. Онда $\omega(x,t)$ функциясы (x_1,t_1) нүктесінде $D_{0|t}^{\alpha}\omega(x_1,t_1)<0$ және $\omega_{xx}(x_1,t_1)+F(x_1,t_1)\ge 0$ теңсіздіктерін қанағаттандырады.

Бұл қарама - қайшылық $\bar{\Omega}$ облысында $\tilde{u}(x,t)\ge 0$ екендігін көрсетеді. Бұдан $\bar{\Omega}$ облысында кез - келген m үшін $u(x,t)\ge m$ орынды екендігі шығады.

1.4.3 - теорема Айталық, $u(x,t)$ функциясы (1.4.1)-(1.4.2) есебінің шешімі болсын. Егер $(x,t)\in\bar{\Omega}$ үшін $F(x,t)\le 0$ болса, онда

$$u(x,t)\le \max_{(x,t)\in\bar{\Omega}}\{\lambda(t),\mu(t),\varphi(x)\}$$

бағалауы орынды.

Жоғарыдағы 1.4.2 және 1.4.3 - теоремалардың нәтижелерінен келесі салдарды алуға болады.

1.4.4 - салдар Айталық, $u(x,t)$ функциясы (1.4.1) теңдеуін және біртекті бастапқы - шеттік шарттарын қанағатандырсын. Егер $(x,t)\in\bar{\Omega}$ үшін $F(x,t)\ge 0$, болса, онда кез - келген $(x,t)\in\bar{\Omega}$ үшін $u(x,t)\ge 0$ орынды.

1.4.5 - салдар Айталық, $u(x,t)$ функциясы (1.4.1) теңдеуін және біртекті бастапқы - шеттік шарттарын қанағатандырсын. Егер $(x,t)\in\bar{\Omega}$ үшін $F(x,t)\le 0$, болса, онда кез - келген $(x,t)\in\bar{\Omega}$ үшін $u(x,t)\le 0$ орынды.

1.4.2 және 1.4.3 - теоремалардағы алынған нәтижелер классикалық жылу өткізгіштік теңдеуі үшін әлсіз максимум қағидасына ұқсас болып келеді. Алынған нәтижелерді (1.4.1) - (1.4.2) есебі шешімнің жалғыздығын дәлелдеуде қолдануға болады.

1.4.6 - теорема Егер (1.4.1) - (1.4.2) есебінің шешімі бар болса, онда ол жалғыз болады.

Дәлелдеуі: Айталық, $u_1(x,t)$ және $u_2(x,t)$ функциялары (1.4.1) - (1.4.2) есебінің шешімдері болсын. Онда $u_1(x,t)-u_2(x,t)$ функциясы

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(u_1(x,t)-u_2(x,t)\right)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,{}_{CF}^{\;*}\mathbf{D}_{0|t}^{1-\alpha}\left(u_1(x,t)-u_2(x,t)\right)$$

теңдеуін және біртекті (1.4.2) бастапқы - шеттік шарттарын қанағаттандырады. Онда, 1.4.2 және 1.4.3 - теоремалар бойынша $\bar{\Omega}$ облысында $u_1(x,t)-u_2(x,t)=0$ болатынын аламыз. Демек, $u_1(x,t)=u_2(x,t).$ Яғни (1.4.1) - (1.4.2) есебінің шешімі шешімі жалғыз.

Сонымен қатар, 1.4.2 және 1.4.3 – теоремалардың нәтижелері арқылы (1.4.1) - (1.4.2) есебі шешімінің бастапқы функциядан үздіксіз тәуелді болатындығын көрсетуге де қолдануға болады.

1.4.7 - теорема Айталық $u(x,t)$ және $\bar{u}(x,t)$ функциялары (1.4.1) - (1.4.2) теңдеуінің $\varphi(x)$ және $\bar{\varphi}(x)$ бастапқы шарттарына сәйкес келетін шешімдері болсын.

Егер

$$\max_{[0,a]}\left\{\left|\varphi(x)-\bar{\varphi}(x)\right|\right\}\le\delta$$

болса, онда

$$\left|u(x,t)-\bar{u}(x,t)\right|\le\delta$$

болады.

Дәлелдеуі: $\tilde{u}(x,t)=u(x,t)-\bar{u}(x,t)$ функциясы

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{u}(x,t)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,{}_{CF}^{\;*}\mathbf{D}_{0|t}^{1-\alpha}\tilde{u}(x,t)$$

теңдеуін, $\tilde{u}(x,0)=\varphi(x)-\bar{\varphi}(x)$ бастапқы шартын және біртекті Дирихле шеттік шарттарын қанағаттандырады. Онда, 1.4.2 және 1.4.3 - теорема нәтижелері бойынша келесі теңсізідкті аламыз:

$$\left|\tilde{u}(x,t)\right|\le\max_{x\in[0,a]}\left\{\left|\varphi(x)-\bar{\varphi}(x)\right|\right\}.$$

Теорема дәлелденді.

Енді уақыт бойынша бөлшек ретті бейсызықты диффузия теңдеуі

$$\begin{cases}\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,{}_{CF}^{\;*}\mathbf{D}_{0|t}^{1-\alpha}u(x,t)+F(x,t,u),\ (x,t)\in(0,a)\times(0,T]=\Omega,\\ u(x,0)=\varphi(x),\ x\in(0,a),\\ u(0,t)=u(a,t)=0,\ 0<t\le T,\end{cases}\tag{1.4.8}$$

үшін бастапқы-шеттік есебін қарастырайық. Мұндағы $F(x,t,u)$ тегіс функция.

1.4.8 - теорема Айталық $F(x,t,u)$ функциясы u бойынша өспейтін функция және (1.4.8) есебінің регуляр шешімі бар болсын, онда есептің шешімі жалғыз болады.

Дәлелдеуі. Айталық $u_1(x,t)$ және $u_2(x,t)$ функциялары (1.4.8) есебінің шешімдері болсын. Онда $v(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t)$ функциясы

$$\begin{cases}v_t(x,t)-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,{}_{CF}^{\;*}\mathbf{D}_{0|t}^{1-\alpha}v(x,t)=F(x,t,u_1)-F(x,t,u_2),\ (x,t)\in\Omega,\\ v(x,0)=0,\ 0<x<a,\\ v(0,t)=v(a,t)=0,\ t\in(0,T]\end{cases}\tag{1.4.9}$$

есебінің шешімі болады.

Орта мән теоремасы бойынша

$$F\left(x,t,u_2\right)-F\left(x,t,u_1\right)=\frac{\partial F}{\partial u}\left(u^*\right)\left(u_2-u_1\right)=-\frac{\partial F}{\partial u}\left(u^*\right)v$$

болады. Мұндағы $\left(u^*\right)=(1-\mu)u_1+\mu u_2,\ \ 0\le\mu\le1$. Бұдан

$$v_t\left(x,t\right)-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,{}_{CF}^{\ *}\mathbf{D}_{0|t}^{1-\alpha}v\left(x,t\right)=-\frac{\partial F}{\partial u}\left(u^*\right)v$$

аламыз. Айталық $v(x,t)$ функциясы нөлден өзгеше болсын. Онда $v(x,t)$ функциясы Ω облысында оң максимум (теріс минимум) мән қабылдайды. $v(x,t)$ функциясы $\left(x_0,t_0\right)\in\Omega$ нүктесінде оң максимум мәнге ие болатындығын және $F\left(x,t,u\right)$ өспейтін функция екендігін, яғни $\frac{\partial F}{\partial u}\left(u^*\right)\le0$ болатынын ескере отырып $-\frac{\partial F}{\partial u}\left(u^*\right)v\left(x_0,t_0\right)\ge0$ теңсіздігін аламыз. Онда $v_t\left(x_0,t_0\right)-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,{}_{CF}^{\ *}\mathbf{D}_{0|t}^{1-\alpha}v\left(x_0,t_0\right)\ge0$ болады. 1.4.2 және 1.4.3 - теорема нәтижелерін қолдану арқылы $u_1\left(x,t\right)=u_2\left(x,t\right)$ теңдігін аламыз. Яғни есептің шешімі жалғыз.

1.4.9 - теорема Айталық $u_1\left(x,t\right)$ және $u_2\left(x,t\right)$ функциялары (1.4.8) есебінің $u_1\left(x,0\right)=g_1\left(x\right)$ және $u_2\left(x,0\right)=g_2\left(x\right)$ бастапқы шарттарына сәйкес келетін шешімдері болсын. Егер $F\left(x,t,u\right)$ функциясы u бойынша өспейтін болса, онда

$$\left\|u_1\left(x,t\right)-u_2\left(x,t\right)\right\|_{\bar\Omega}\le\left\|g_1\left(x\right)-g_2\left(x\right)\right\|_{[0,a]}$$

бағалауы орынды.

Дәлелдеуі. Айталық $v\left(x,t\right)=u_1\left(x,t\right)-u_2\left(x,t\right)$ болсын. Онда $v\left(x,t\right)$ функциясы

$$\begin{cases} v_t\left(x,t\right)-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,{}_{CF}^{\ *}\mathbf{D}_{0|t}^{1-\alpha}v\left(x,t\right)=-\frac{\partial F}{\partial u}\left(u^*\right)v,\ \left(x,t\right)\in\Omega, \\ v\left(x,0\right)=g_1\left(x\right)-g_2\left(x\right),\ 0\le x\le a, \\ v\left(0,t\right)=v\left(a,t\right)=0,\ t\in\left(0,T\right] \end{cases}$$

есебінің шешімі болады. Айталық $M=\left\|g_1\left(x\right)-g_2\left(x\right)\right\|_{[0,a]}$ болсын, сондай-ақ 1.4.9 - теорема дұрыс емес деп кері жориық. Яғни, $\left\|u_1\left(x,t\right)-u_2\left(x,t\right)\right\|_{\bar\Omega}\nleq M$. Онда, $v\left(x,t\right)$ функциясы $\left(x_0,t_0\right)\in\Omega$ нүктесінде $v\left(x_0,t_0\right)=M_1>M$ болатын оң максимум мәнін немесе $\left(x_0,t_0\right)\in\Omega$ нүктесінде $v\left(x_0,t_0\right)=M_2<-M$ болатын теріс минимум мәнін қабылдайды. Егер $v\left(x_0, t_0\right) = M_1 > M$ болса, $v\left(x, t\right)$ функциясының бастапқы - шеттік шарттарын қолданып $\left(x_0, t_0\right) \in \Omega$ екендігін аламыз. Ары қарай 1.4.2 және 1.4.3 - теоремаларды қолданып $\left\| v\left(x, t\right) \right\| \le M$ теңсіздігін аламыз.

2 БӨЛШЕК РЕТТІ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРДІҢ РЕГУЛЯР ШЕШІМДЕРІ

2.1 Сызықты бөлшек ретті диффузия теңдеуі үшін Дьюамел қағидасы және оның қолданыстары

Классикалық Дьюамел қағидасы, шамамен 200 жыл бұрын Жан-Мари-Констант Дьюамелдің зерттеуінен соң пайда болған. Бұл қағида біртекті емес дифференциалдық теңдеулер үшін қойылған Коши есебін шешуге арналған.

Дьюамел қағидасының негізгі идеасы біртекті дифференциалдық теңдеулер үшін Коши есебінің шешімі арқылы біртекті емес дифференциалдық теңдеулер үшін Коши есебінің шешімін құру болып табылады.

Бұл әйгілі қағиданың бөлшек ретті дифференциалдық теңдеулер үшін жалпылауы алғашқы рет Умаровтың [49] жұмысында алынды.

Бұл бөлімде уақыт бойынша бөлшек ретті диффузиялық теңдеуіне

$$u_t\left(x,t\right)-\Delta_x D_{0|t}^{1-\alpha}u\left(x,t\right)=f\left(x,t\right),\ \ 0<\alpha<1,\ \ x\in R^N,\ \ t>0, \tag{2.1.1}$$

қойылған

$$u\left(x,0\right)=u_0\left(x\right),\ \ x\in R^N, \tag{2.1.2}$$

Коши есебі үшін Дьюамел қағидасының баламасы зерттелінеді. Мұндағы $u_0\left(x\right)$ және $f\left(x,t\right)$ берілген функциялар.

2.1.0 - анықтама Берілген $f\left(x,t\right)\in C_0\left(R^N;C\left(0,\infty\right)\right)$ және $u_0\left(x\right)\in C_0\left(R^N\right)$ функциялары үшін (2.1.1)-(2.1.2) есебінің классикалық шешімі деп $u\left(x,t\right)\in C\left(R^N;\left[0,\infty\right)\right)$ және $\frac{\partial}{\partial t}u\left(x,t\right),\Delta_x D_{0|t}^{1-\alpha}u\left(x,t\right)\in C\left(R^N;\left(0,\infty\right)\right)$ класынан болған фунцияны айтамыз. Мұндағы $C\left(\cdot\right)$ нормасы sup арқылы берілген шенелген үздіксіз функциялар класы.

Грин функциясы

Сызықты біртекті бөлшек ретті диффузиялық теңдеу

$$u_t\left(x,t\right)-\Delta_x D_{0|t}^{1-\alpha}u\left(x,t\right)=0,\ \ 0<\alpha<1,\ \ x\in R^N,\ \ t>0 \tag{2.1.3}$$

үшін

$$u\left(x,0\right)=u_0\left(x\right),\ \ x\in R^N \tag{2.1.4}$$

Коши есебін қарастырайық.

2.1.1 - теорема Айталық $u_0\left(x\right)\in C_0\left(R^N\right)$ болсын. Онда (2.1.3) - (2.1.4) есебінің $u\left(x,t\right)$ жалғыз регуляр шешімі

$$u(x,t)=\int\limits_{R^N} G(x-y,t)u_0(y)dy,\ \ x\in R^N,\ \ t>0 \qquad (2.1.5)$$

түрінде беріледі. Мұндағы

$$G(x,t)=\frac{1}{(2\pi)^N}\int\limits_{R^N} e^{-i<x,\xi>}E_{\alpha,1}\left(-|\xi|^2 t^\alpha\right)d\xi,\ \ x\in R^N,\ \ t>0$$

Грин функциясы және $E_{\alpha,1}(z)$ Миттаг - Леффлер функциясы.

2.1.2 - лемма Грин $G(x,t)$ функциясы үшін келесі қасиеттер орынды:

$$\frac{\partial}{\partial t}G(x,t)-\Delta_x D_{0|t}^{1-\alpha}G(x,t)=0,\ \ x\in R^N,\ \ t>0, \qquad (2.1.6)$$

$$G(x,0)=\frac{1}{(2\pi)^N}\int\limits_{R^N} e^{-i<x,\xi>}d\xi=\delta(x),\ \ x\in R^N, \qquad (2.1.7)$$

$$\int\limits_{R^N} G(x,t)dx=1,\ \ t>0, \qquad (2.1.8)$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}G(x,t)\right|=\left|\Delta_x D_{0|t}^{1-\alpha}G(x,t)\right|\le C,\ \ t\ge t_0>0,\ \ x\in R^N \qquad (2.1.9)$$

мұндағы $\delta(x)$ - Дирак функциясы.

Дәлелдеуі: (2.1.7) теңдігінің орындылығы 1.1.12 - леммадан тікелей шығады. Миттаг - Леффлер функциясының $E_{\alpha,1}(0)=1$ қасиетінен және 1.1.12 - леммадан

$$\int\limits_{R^N} G(x,t)dx=\frac{1}{(2\pi)^N}\int\limits_{R^N}\int\limits_{R^N} e^{-i<x,\xi>}E_{\alpha,1}\left(-|\xi|^2 t^\alpha\right)d\xi dx=\frac{1}{(2\pi)^N}\int\limits_{R^N} E_{\alpha,1}\left(-|\xi|^2 t^\alpha\right)\int\limits_{R^N} e^{-i<x,\xi>}dxd\xi=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^N}\int\limits_{R^N} E_{\alpha,1}\left(-|\xi|^2 t^\alpha\right)\delta(\xi)d\xi=1$$

теңдігі орынды болатындығына көз жеткіземіз.

Миттаг - Леффлер функциясының

$$\frac{\partial}{\partial t}E_{\alpha,1}\left(-|\xi|^2 t^\alpha\right)=-t^{\alpha-1}\xi^2 E_{\alpha,\alpha}\left(-|\xi|^2 t^\alpha\right)$$

қасиетінен [31, 40 бет], келесі теңдікті аламыз:

$$\frac{\partial}{\partial t}G(x,t)=-\frac{t^{\alpha-1}}{(2\pi)^N}\int\limits_{R^N}e^{-i<x,\xi>}\xi^2E_{\alpha,\alpha}\left(-|\xi|^2t^\alpha\right)d\xi.$$

Сондай - ақ, Риман-Лиувилль туындысының қасиетін пайдаланып [31, 78 бет, (2.1.54)-формула]

$$\Delta_x D_{0|t}^{1-\alpha}G(x,t)=-\frac{t^{\alpha-1}}{(2\pi)^N}\int\limits_{R^N}e^{-i<x,\xi>}\xi^2E_{\alpha,\alpha}\left(-|\xi|^2t^\alpha\right)d\xi,\ x\in R^N,\ \ t>0$$

орынды болатындығын аламыз.

Онда, жоғарыдағы есептеулерден (2.1.6) теңдігін аламыз.

Сонымен қатар, Миттаг - Леффлер функциясының

$$E_{\alpha,\alpha}(-z)\le\frac{C}{(1+z)^2},\ \ 0<\alpha<1,\ \ z>0$$

қасиетін пайдаланып [39]

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}G(x,t)\right|=\left|\Delta_x D_{0|t}^{1-\alpha}G(x,t)\right|\le\frac{t^{\alpha-1}}{(2\pi)^N}\int\limits_{R^N}\left|e^{-i<x,\xi>}\right|\xi^2E_{\alpha,\alpha}\left(-|\xi|^2t^\alpha\right)d\xi\le$$

$$\le Ct^{\alpha-1}\int\limits_{R^N}|\xi|^2\frac{1}{\left(1+|\xi|^2t^\alpha\right)^2}d\xi\le Ct^{-1}\int\limits_{R^N}\frac{1}{1+|\xi|^2t^\alpha}d\xi\le C,\ \ t\ge t_0>0,\ \ x\in R^N$$

бағалауын аламыз. Ал бұл нәтиже (2.1.9) теңсіздігінің орынды екендігін дәлелдейді.

2.1.1 - теореманың дәлелдеуі: (2.1.3) - (2.1.4) есебіне x айнымалысы бойынша Фурье түрлендіруін қолдану арқылы

$$\tilde{u}_t(\xi,t)+|\xi|^2D_{0|t}^{1-\alpha}\tilde{u}(\xi,t)=0,\ \ \xi\in R^N,\ \ t>0, \tag{2.1.10}$$

$$\tilde{u}(\xi,0)=\tilde{u}_0(\xi),\ \ \xi\in R^N \tag{2.1.11}$$

есебін аламыз.

Онда (2.1.10) - (2.1.11) есебінің шешімі

$$\tilde{u}(\xi,t)=E_{\alpha,1}\left(-|\xi|^2t^\alpha\right)\tilde{u}_0(\xi) \tag{2.1.12}$$

функциясы [50, 134 бет, 51] болып табылады.

Сонымен қатар, (2.1.12) функциясына кері Фурье түрлендіруін қолдану арқылы

$$u(x,t)=\frac{1}{(2\pi)^N}\int\limits_{R^N} e^{-i<x,\xi>}E_{\alpha,1}\left(-|\xi|^2 t^\alpha\right)\tilde{u}_0(\xi)\,d\xi=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^N}\int\limits_{R^N} e^{-i<x,\xi>}E_{\alpha,1}\left(-|\xi|^2 t^\alpha\right)\int\limits_{R^N} e^{i<y,\xi>}u_0(y)\,dyd\xi= \qquad (2.1.13)$$

$$=\int\limits_{R^N}\left[\frac{1}{(2\pi)^N}\int\limits_{R^N} e^{-i<x-y,\xi>}E_{\alpha,1}\left(-|\xi|^2 t^\alpha\right)d\xi\right]u_0(y)\,dy=$$

$$=\int\limits_{R^N} G(x-y,t)u_0(y)\,dy$$

аламыз.

Айталық, (2.1.13) теңдігіндегі t параметрінің мәні 0 - ге тең болсын. Онда (2.1.7) формула бойынша

$$u(x,t)=\int\limits_{R^N} G(x-y,0)u_0(y)\,dy=\int\limits_{R^N}\delta(x-y)u_0(y)\,dy=u_0(x)$$

теңдігі орынды.

Енді, жоғарыда алынған шешімнің регуляр болатындығын көрсетейік.

Берілген (2.1.8) және (2.1.5) формулаларын пайдаланып

$$|u(x,t)|=\left|\int\limits_{R^N} G(x-y,t)u_0(y)\,dy\right|\le\|u_0(x)\|_{C_0(R^N)}\left|\int\limits_{R^N} G(x-y,t)u_0(y)\,dy\right|=\|u_0(x)\|_{C_0(R^N)}$$

бағалауын аламыз. Яғни,

$$\|u(x,t)\|_{C(R^N;[0,\infty))}\le\|u_0(x)\|_{C_0(R^N)}$$

бағалауы орынды.

Сонымен қатар, (2.1.9) теңдігі негізінде, келесі бағалауды аламыз:

$$|u_t(x,t)|=\int\limits_{R^N}\left|\frac{\partial}{\partial t}G(x-y,t)\right||u_0(y)|\,dy\le C\int_{supp(u_0)}|u_0(y)|\,dy\le C\|u_0(x)\|_{C_0(R^N)}.$$

Яғни,

$$\|u_t(x,t)\|_{C(R^N;(0,\infty))}\le\|u_0(x)\|_{C_0(R^N)}$$

бағалауы орынды.

Жоғарыдағы есептеулерді қайталау арқылы

$$\left\| \Delta_x D_{0|t}^{1-\alpha} u(x,t) \right\|_{C\left(R^N;(0,\infty)\right)} \le \left\| u_0(x) \right\|_{C_0\left(R^N\right)}$$

теңсіздігінің де орынды болатындығына көз жеткіземіз.

2.1.3 - теорема Айталық, $f(x,t) \in C_0\left(R^N; C(0,\infty)\right)$ болсын. Онда,

$$w_t(x,t;\tau) - \Delta_x D_{\tau|t}^{1-\alpha} w(x,t;\tau) = 0, \quad 0 < \alpha < 1, \; x \in R^N, \quad t > \tau \tag{2.1.14}$$

теңдеуінің

$$w(x,t;\tau)\big|_{\tau=t} = f(x,\tau) \tag{2.1.15}$$

шартын қанағаттандыратын жалғыз регуляр шешімі

$$w(x,t;\tau) = \int_{R^N} G(x-y, t-\tau) f(y,\tau) dy \tag{2.1.16}$$

түрінде болады. Мұндағы

$$D_{\tau|t}^{1-\alpha} u(x,t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\tau}^{t} (t-s)^{\alpha-1} u(x,s) ds.$$

Дәлелдеуі: Теорема 2.1.1 - теорема және 2.1.2 - лемма нәтижелерін қолдану арқылы дәлелденеді.

Дьюамел қағидасының бөлшек ретті баламасы

Келесі түрдегі

$$u_t(x,t) - \Delta_x D_{0|t}^{1-\alpha} u(x,t) = f(x,t), \quad 0 < \alpha < 1, \; x \in R^N, \quad t > 0, \tag{2.1.17}$$

$$u(x,0) = 0, \quad x \in R^N \tag{2.1.18}$$

Коши есебін қарастырайық.

2.1.4 - теорема Айталық $f(x,t) \in C_0\left(R^N; C(0,\infty)\right)$ болсын. Онда, (2.1.17) - (2.1.18) есебінің жалғыз регуляр шешімі

$$u(x,t) = \int_0^t w(x,t;\tau) d\tau \tag{2.1.19}$$

өрнегі арқылы беріледі. Мұндағы $w(x,t;\tau)$ функциясы (2.1.14) - (2.1.15) есебінің регуляр шешімі.

Д ә л е л д е у і: $w(x,t;\tau)$ функциясы (2.1.14) - (2.1.15) есебінің регуляр шешімі болғандықтан, $w(x,t;\tau), w_t(x,t;\tau), \Delta_x D_{\tau|t}^{1-\alpha} w(x,t;\tau) \in C\left(R^N;(0,\infty)\right)$ орынды. Бұл бізге (2.1.19) интегралындағы функцияларды дифференциалдауға мүмкіндік береді.

(2.1.19) функциясының t бойынша туындысы

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = w(x,t;\tau)\Big|_{\tau=t} + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}w(x,t;\tau)\,d\tau \tag{2.1.20}$$

өрнегі арқылы анықталады [48]. Онда, Фубини теоремасы бойынша

$$D_{0|t}^{1-\alpha}u(x,t) = D_{0|t}^{1-\alpha}\int_0^t w(x,t;\tau)\,d\tau = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\int_0^s w(x,s;\tau)\,d\tau ds =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t\int_\tau^t w(x,s;\tau)(t-s)^{\alpha-1}\,ds d\tau$$

теңдігін аламыз.

Келесі

$$W(x,t;\tau) = \int_\tau^t w(x,s;\tau)(t-s)^{\alpha-1}\,ds$$

белгілеуді енгізейік. Онда, (2.1.20) бойынша

$$\frac{\partial}{\partial t}W(x,t;\tau) = W(x,t;\tau)\Big|_{\tau=t} + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}W(x,t;\tau)\,d\tau.$$

теңдігін аламыз.

Сонымен қатар, $w(x,t;\tau)$ функциясының үздіксіздігінен

$$W(x,t;\tau)\Big|_{\tau=t} = \lim_{\tau\to t}\int_\tau^t w(x,s;\tau)(t-s)^{\alpha-1}\,ds = 0$$

нәтижесін аламыз. Онда

$$\Delta_x D_{0|t}^{1-\alpha}u(x,t) = \int_0^t \Delta_x D_{\tau|t}^{1-\alpha}w(x,t;\tau)\,d\tau \tag{2.1.21}$$

орынды болады.

Демек, (2.1.20) және (2.1.21) өрнектері арқылы (2.1.17) теңдеуін

$$u_t(x,t)-\Delta_x D_{0|t}^{1-\alpha}u(x,t)=w(x,t;\tau)\Big|_{\tau=t}+\int_0^t \frac{\partial}{\partial t}w(x,t;\tau)d\tau-\Delta_x D_{0|t}^{1-\alpha}\int_0^t w(x,t;\tau)d\tau=$$

$$=w(x,t;\tau)\Big|_{\tau=t}+\int_0^t\left[\frac{\partial}{\partial t}w(x,t;\tau)d\tau-\Delta_x D_{\tau|t}^{1-\alpha}w(x,t;\tau)\right]d\tau=f(x,t)$$

түрінде жазуға болады.

Сонымен қатар, $u(x,0)=0$ орындалатындығын байқау қиын емес. Онда, $u(x,t)=\int_0^t w(x,t;\tau)d\tau$ функциясы (2.1.17) - (2.1.18) есебінің шешімі болып табылады.

Енді осы шешімнің регуляр болатындығын көрсетеміз. Онда, (2.1.16), (2.1.19) және (2.1.8) теңдіктері бойынша

$$|u(x,t)|\le\|f(x,t)\|_{C_0(R^N;C(0,\infty))}\left|\int_0^t\int_{R^N}G(x-y,t-\tau)dyd\tau\right|\le C\|f(x,t)\|_{C_0(R^N;C(0,\infty))}$$

бағалауын аламыз. Бұдан

$$\|u(x,t)\|_{C(R^N;(0,\infty))}\le C\|f(x,t)\|_{C_0(R^N;C(0,\infty))}$$

теңсіздігі орынды болатындығы шығады.

$u_t(x,t)$ және $\Delta_x D_{0|t}^{1-\alpha}u(x,t)$ функцияларының регулярлығы (2.1.9) теңсіздігін қолдану арқылы жоғарыға ұқсас есептеулермен дәлелденеді.

2.1.3 және 2.1.4 - теоремаларынан келесі тұжырымды аламыз.

2.1.5 - теорема Егер $f(x,t)\in C_0(R^N;C(0,\infty))$ және $u_0(x)\in C_0(R^N)$ болса, онда (2.1.1) - (2.1.2) есебінің жалғыз регуляр шешімі

$$u(x,t)=u_1(x,t)+u_2(x,t) \qquad (2.1.22)$$

арқылы өрнектеледі. Мұндағы $u_1(x,t)$ және $u_2(x,t)$ функциялары (2.1.3) - (2.1.4) және (2.1.17) - (2.1.18) есептерінің сәйкес шешімдері болып табылады, және оны келесі өрнек арқылы жазуға болады:

$$u(x,t)=\int_{R^N}G(x-y,t)u_0(y)dy+\int_0^t\int_{R^N}G(x-y,t-\tau)f(y,\tau)dyd\tau. \qquad (2.1.23)$$

Енді (2.1.3)-(2.1.4) есебі шешімінің орнықтылығын зерттейміз.

2.1.6 - теорема (шешімнің орнықтылығы) Айталық $u_0(x)\in C_0(R^N)$ болсын. Онда (2.1.3) - (2.1.4) есебінің шешімі орнықты.

Дәлелдеуі: Айталық $u_1(x,t)$ және $u_2(x,t)$ функциялары (2.1.3) теңдеуінің

$$u_1(x,0)=u_0^{(1)}(x),\ x\in R^N \tag{2.1.24}$$

және

$$u_2(x,0)=u_0^{(2)}(x),\ x\in R^N \tag{2.1.25}$$

бастапқы шарттарын қанағаттандыратын шешімдері болсын.

Онда, $u_1(x,t)-u_2(x,t)$ функциясы келесі есептің шешімі болады:

$$u_t(x,t)-\Delta_x D_{0|t}^{1-\alpha}u(x,t)=0,\ x\in R^N,\ \ t>0, \tag{2.1.26}$$

$$u(x,0)=u_0^{(1)}(x)-u_0^{(2)}(x),\ x\in R^N. \tag{2.1.27}$$

Онда, 2.1.1 - теореманың нәтижесі бойынша келесі теңдік орынды:

$$u_1(x,t)-u_2(x,t)=\int\limits_{R^N}G(x-y,t)\left[u_0^{(1)}(y)-u_0^{(2)}(y)\right]dy. \tag{2.1.28}$$

Сонымен қатар, (2.1.28) теңдігіне (2.1.8) өрнегін қолдану арқылы

$$\left|u_1(x,t)-u_2(x,t)\right|=\left|\int\limits_{R^N}G(x-y,t)\left[u_0^{(1)}(y)-u_0^{(2)}(y)\right]dy\right|<$$

$$<\left\|u_0^{(1)}(x)-u_0^{(2)}(x)\right\|_{C_0\left(R^N\right)}\left|\int\limits_{R^N}G(x-y,t)\,dy\right|=\left\|u_0^{(1)}(x)-u_0^{(2)}(x)\right\|_{C_0\left(R^N\right)}$$

теңсіздігін аламыз. Яғни

$$\left\|u_1(x,t)-u_2(x,t)\right\|_{C\left(R^N;(0,\infty)\right)}<\left\|u_0^{(1)}(x)-u_0^{(2)}(x)\right\|_{C_0\left(R^N\right)}$$

орынды болады.

Кез - келген $\varepsilon>0$ саны үшін, $\delta<\varepsilon$ болатындай δ мәнін таңдап аламыз. Онда $\left\|u_0^{(1)}(x)-u_0^{(2)}(x)\right\|_{C_0\left(R^N\right)}<\delta$ үшін

$$\left\|u_1(x,t)-u_2(x,t)\right\|_{C\left(R^N;(0,\infty)\right)}<\varepsilon,\ \ t>0$$

теңсіздігі орынды болатындығы шығады.

Демек, (2.1.3) - (2.1.4) есебінің $u(x,t)$ шешімі орнықты.

2.2 Полиномиалды бейсызықтылықпен берілген диффузия теңдеуінің локал интегралдық шешімі

Бұл бөлімде бөлшек ретті диффузия теңдеуі

$$u_t(x,t)-\Delta_x D_{0|t}^{1-\alpha}u(x,t)=|x|^{\rho}t^{\sigma}|u(x,t)|^{p},\ \ 0<\alpha<1,\ \ x\in R^N,\ \ t>0 \tag{2.2.1}$$

үшін

$$u(x,0)=u_0(x),\ \ x\in R^N \tag{2.2.2}$$

Коши есебінің локал интегралдық шешімін зерттейміз. Мұндағы $\rho\ge 0,\ \ \sigma>-1$.

2.2.1 - анықтама (Локалды әлсіз шешім) Берілген $u_0(x)\in L^{\infty}(R^N)$ үшін

$$-\int_{R^N}u_0(x)\varphi(x,0)dx-\int_0^T\int_{R^N}f(x,t,u)\varphi(x,t)dxdt=$$

$$=\int_0^T\int_{R^N}u(x,t)\mathbf{D}_{t|T}^{1-\alpha}\Delta_x\varphi(x,t)dxdt+\int_0^T\int_{R^N}u(x,t)\varphi_t(x,t)dxdt \tag{2.2.3}$$

интегралдық теңдеуін қанағаттандыратын $u(x,t)\in L^{\infty}\left(R^N;(0,T)\right)$ функциясы (2.2.1) - (2.2.2) есебінің локалды әлсіз шешімі деп аталады. Мұндағы $\varphi(x,t)\in C_{x,t}^{2,1}\left(R^N;[0,T]\right)$ және $\varphi(x,T)=0.$

2.2.2 - анықтама (Интегралдық шешім) [17, 78 бет] Берілген $u_0(x)\in C_0(R^N)$ және $T>0$ үшін

$$u(x,t)=\int_{R^N}G(x-y,t)u_0(y)dy+\int_0^t\int_{R^N}G(x-y,t-\tau)|y|^{\rho}\tau^{\sigma}|u(y,\tau)|^{p}dyd\tau \tag{2.2.4}$$

интегралдық теңдеуін қанағаттандыратын $u(x,t)\in C_0\left(R^N;C[0,T)\right)$ функциясы (2.2.1) - (2.2.2) есебінің интегралдық шешімі деп аталады. Мұндағы

$$G(x,t)=\frac{1}{(2\pi)^N}\int_{R^N}e^{-i<x,\xi>}E_{\alpha,1}\left(-|\xi|^2t^{\alpha}\right)d\xi,\ \ x\in R^N,\ \ t>0$$

және $E_{\alpha,1}(z)$ Миттаг - Леффлер функциясы.

2.2.3 - лемма (Интегралдық шешім$\to$Әлсіз шешім) [52, 4.2 - лемма]

Айталық $u_0(x) \in C_0(R^N)$ болсын. Егер $u(x,t) \in C_0(R^N; C[0,T))$ функциясы (2.2.1) - (2.2.2) есебінің интегралдық шешімі болса, онда $u(x,t)$ функциясы (2.2.1) - (2.2.2) есебінің әлсіз шешімі болады.

2.2.4 - теорема (Локал интегралдық шешімнің бар болуы) Айталық, $\rho = 0,\ p > 1$ және $u_0(x) \in C_0(R^N)$ болсын. Онда (2.2.1) - (2.2.2) есебінің жалғыз $u(x,t) \in C_0(R^N; C[0,T))$ локал интегралдық шешімі бар болады. Мұндағы $T > 0$ шешімнің бар болуының максимал уақыты.

Дәлелдеуі: Кез - келген $T > 0$ үшін, келесі түрдегі Банах кеңістігін анықтайық:

$$B_T = \left\{ u(x,t) \in C_0\left(R^N; C[0,T)\right); \|u\|_{B_T} \le 2\|u_0\|_{L^\infty(R^N)} \right\}.$$

Мұндағы $\|u\|_{B_T} = \|u\|_{L^\infty(R^N;(0,T))}$ B_T кеңістігінің нормасы.

Келесі кезекте, $u(x,t) \in B_T$ үшін Ψ бейнелеуін енгіземіз:

$$\Psi(u) = \int_{R^N} G(x-y,t) u_0(y)\,dy + \int_0^t \int_{R^N} G(x-y,t-\tau)\tau^\sigma |u(y,\tau)|^p\,dyd\tau.$$

Есептің жалғыз локалды шешімінің бар болуын Банахтың жылжымайтын нүкте теоремасы негізінде дәлелдейміз.

Алдымен $\Psi : B_T \to B_T$ болатындығын көрсетеміз. Айталық $u(x,t) \in B_T$ болсын. Онда 1.1.19 - лемма, (2.1.23) формула және (2.1.8) теңдіктері бойынша

$$\|u(x,t)\|_{B_T} \le \|u_0\|_{L^\infty(R^N)} + \left\| \int_0^t \tau^\sigma \|u^p(\cdot,\tau)\|_{L^\infty(R^N)}\,d\tau \right\|_{L^\infty(0,T)} \le$$

$$\le \|u_0\|_{L^\infty(R^N)} + \frac{T^{\sigma+1}}{\sigma+1}\|u\|^p_{L^\infty(R^N;(0,T))} \le$$

$$\le \|u_0\|_{L^\infty(R^N)} + \frac{2^p T^{\sigma+1}}{\sigma+1}\|u_0\|^{p-1}_{L^\infty(R^N)}\|u_0\|_{L^\infty(R^N)}$$

бағалауын аламыз.

Бұдан, $u(x,t) \in B_T$ болатындығын ескеріп

$$\frac{2^p T^{\sigma+1}}{\sigma+1}\|u_0\|^{p-1}_{L^\infty(R^N)} \le 1$$

теңсіздігі орындалатындай T параметрінің мәні таңдап алынады.

Енді Ψ бейнелеуінің B_T кеңістігінде сығып бейнелеу болатындығын көрсетеміз.

Айталық $u(x,t),\ \tilde{u}(x,t)\in B_T$ болсын. Онда (2.1.8) теңдігі бойынша

$$\|u-\tilde{u}\|_{B_T} \le \left\| \int_0^t \tau^{\sigma} \left\| |u(\cdot,\tau)|^p - |\tilde{u}(\cdot,\tau)|^p \right\|_{L^\infty(R^N)} d\tau \right\|_{L^\infty(0,T)} \le$$

$$\le \frac{2^p T^{\sigma+1}}{\sigma+1} \|u_0\|^{p-1}_{L^\infty(R^N)} \|u-\tilde{u}\|_{L^\infty(R^N;(0,T))} \le \|u-\tilde{u}\|_{L^\infty(R^N;(0,T))},$$

бағалауы орынды. Мұндағы T параметрі $\frac{2^p T^{\sigma+1}}{\sigma+1} \|u_0\|^{p-1}_{L^\infty(R^N)} \le 1$ теңсіздігі орынды болатындай етіп таңдалады.

Онда, Банахтың жылжымайтын нүкте теоремасы бойынша (2.2.1) - (2.2.2) есебінің жалғыз локал шешімі бар екендігі шығады.

2.3 Полинималды бейсызықтылықпен берілген диффузия теңдеулер жүйесінің локал интегралдық шешімі

Бұл бөлімде полинималды бейсызықтылықпен берілген диффузия теңдеулер жүйесі

$$\begin{cases} u_t(x,t) - \Delta_x D_{0|t}^{1-\alpha} u(x,t) = |x|^{\rho_1} t^{\sigma_1} v^p(x,t), & x\in R^N, \ t>0, \\ v_t(x,t) - \Delta_x D_{0|t}^{1-\beta} v(x,t) = |x|^{\rho_2} t^{\sigma_2} u^q(x,t), & x\in R^N, \ t>0, \end{cases} \tag{2.3.1}$$

үшін

$$u(x,0) = u_0(x) \ge 0, \ \ v(x,0) = v_0(x) \ge 0, \ \ x\in R^N \tag{2.3.2}$$

Коши есебі зерттеледі. Мұндағы $0<\alpha,\beta<1,\ p,q>1$ және $\rho_1,\rho_2\ge 0,\ \ \sigma_1,\sigma_2>-1.$

2.3.1 - анықтама (Интегралдық шешім) Берілген $u_0(x),\ v_0(x)\in C_0\left(R^N\right)$ және $T>0$ үшін

$$\begin{cases} u(x,t) = \int_{R^N} G(x-y,t)u_0(y)dy + \int_0^t \int_{R^N} G(x-y,t-\tau)|y|^{\rho_1}\tau^{\sigma_1} v^p(y,\tau)dyd\tau, \\ v(x,t) = \int_{R^N} G(x-y,t)v_0(y)dy + \int_0^t \int_{R^N} G(x-y,t-\tau)|y|^{\rho_2}\tau^{\sigma_2} u^q(y,\tau)dyd\tau, \end{cases} \tag{2.3.3}$$

интегралдық теңдеулер жүйесін қанағаттандыратын $(u,v)\in C_0\left(R^N;C[0,T]\right)\times C_0\left(R^N;C[0,T]\right)$ функциялары (2.3.1) - (2.3.2) есебінің интегралдық шешімі деп аталады. Мұндағы

$$G(x,t)=\frac{1}{(2\pi)^N}\int_{R^N} e^{-i<x,\xi>}E_{\alpha,1}\left(-|\xi|^2 t^\alpha\right)d\xi,\ \ x\in R^N,\ \ t>0$$

және $E_{\alpha,1}(z)$ Миттаг - Леффлер функциясы.

2.3.2 - теорема (Локал шешімнің бар болуы) Айталық, $p,q>1,\ \rho_1=\rho_2=0$ және $u_0(x),\ v_0(x)\in C_0(R^N)$ болсын. Онда (2.3.1) - (2.3.2) есебінің жалғыз $(u,v)\in C_0(R^N;C[0,T])\times C_0(R^N;C[0,T])$ локал шешімі бар болады. Мұндағы $T>0$ шешімнің бар болуының максимал уақыты.

Дәлелдеуі: Әрбір $T>0$ параметрі үшін, Банах кеңістігін анықтайық:

$$B_T=\Big\{(u,v)\in C_0\left(R^N;C[0,T]\right)\times C_0\left(R^N;C[0,T]\right);$$

$$\|(u,v)\|_{B_T}\le 2\left(\|u_0\|_{L^\infty(R^N)}+\|v_0\|_{L^\infty(R^N)}\right)\Big\}. \tag{2.3.4}$$

Мұндағы $\|\cdot\|$ - B_T кеңістігінің нормасы

$$\|(u,v)\|_{B_T}=\|u\|_1+\|v\|_1=\|u\|_{L^\infty(R^N;(0,T))}+\|v\|_{L^\infty(R^N;L^\infty(0,T))}$$

түрінде анықталады.

Сонымен қатар, $(u,v)\in B_T$ үшін

$$\Psi(u,v)=\left(\Psi_1(u,v),\Psi_2(u,v)\right)$$

бейнелеуін енгіземіз. Мұндағы

$$\Psi_1(u,v)=\int_{R^N}G(x-y,t)u_0(y)dy+\int_0^t\int_{R^N}G(x-y,t-\tau)\tau^{\sigma_1}v^p(y,\tau)dyd\tau$$

және

$$\Psi_2(u,v)=\int_{R^N}G(x-y,t)v_0(y)dy+\int_0^t\int_{R^N}G(x-y,t-\tau)\tau^{\sigma_2}u^q(y,\tau)dyd\tau$$

арқылы өрнектеледі.

Есептің жалғыз локалды шешімінің бар болуын Банах жылжымайтын нүкте теоремасы негізінде дәлелдейміз.

Алдымен $\Psi:B_T\to B_T$ болатындығын көрсетеміз. Айталық $(u,v)\in B_T$ болсын. Онда 1.1.19 - лемма, (2.1.23) формула және (2.1.8) теңдік бойынша

$$\left\|\Psi(u,v)\right\|_{B_T} = \left\|\Psi_1(u,v)\right\|_{L^\infty\left(R^N;(0,T)\right)} + \left\|\Psi_2(u,v)\right\|_{L^\infty\left(R^N;(0,T)\right)} \le$$

$$\le \left\|u_0\right\|_{L^\infty\left(R^N\right)} + \left\|\int_0^t \tau^{\sigma_1}\left\|v(\cdot,\tau)\right\|^p_{L^\infty\left(R^N\right)} d\tau\right\|_{L^\infty(0,T)} + \left\|v_0\right\|_{L^\infty\left(R^N\right)} + \left\|\int_0^t \tau^{\sigma_2}\left\|u(\cdot,\tau)\right\|^q_{L^\infty\left(R^N\right)} d\tau\right\|_{L^\infty(0,T)} \le$$

$$\le \left\|u_0\right\|_{L^\infty\left(R^N\right)} + \left\|v_0\right\|_{L^\infty\left(R^N\right)} + \frac{T^{\sigma_1+1}}{\sigma_1+1}\left\|v\right\|^p_{L^\infty\left(R^N;(0,T)\right)} + \frac{T^{\sigma_2+1}}{\sigma_2+1}\left\|u\right\|^q_{L^\infty\left(R^N;(0,T)\right)} \le$$

$$\le \left\|u_0\right\|_{L^\infty\left(R^N\right)} + \frac{2^p T^{\sigma_1+1}}{\sigma_1+1}\left\|v_0\right\|^{p-1}_{L^\infty\left(R^N;(0,T)\right)}\left\|v_0\right\|_{L^\infty\left(R^N\right)} +$$

$$+\left\|v_0\right\|_{L^\infty\left(R^N\right)} + \frac{2^q T^{\sigma_2+1}}{\sigma_2+1}\left\|u_0\right\|^{q-1}_{L^\infty\left(R^N;(0,T)\right)L^\infty\left(R^N\right)} \le$$

$$\le \left\|u_0\right\|_{L^\infty\left(R^N\right)} + \left\|v_0\right\|_{L^\infty\left(R^N\right)} + MT^{\sigma+1}\left(\left\|v_0\right\|_{L^\infty\left(R^N\right)} + \left\|u_0\right\|_{L^\infty\left(R^N\right)}\right)$$

бағалауы орынды. Мұндағы

$$M = \max\left\{\frac{2^p}{\sigma_1+1}\left\|v_0\right\|^{p-1}_{L^\infty\left(R^N;(0,T)\right)};\frac{2^q}{\sigma_2+1}\left\|u_0\right\|^{q-1}_{L^\infty\left(R^N;(0,T)\right)}\right\},\quad \sigma = \max\{\sigma_1;\sigma_2\}.$$

Сәйкесінше, T параметрінің мәнін $MT^{\sigma+1} \le 1$ теңсіздігі орындалатындай етіп таңдап аламыз. Бұдан, $\Psi(u,v) \in B_T$ болатындығын аламыз.

Енді Ψ бейнелеуінің B_T кеңістігінде сығып бейнелеу болатындығын көрсетеміз. Айталық (u,v), $(\tilde{u},\tilde{v}) \in B_T$ болсын. Онда (2.1.8) теңдігі бойынша

$$\left\|\Psi(u,v)-\Psi(\tilde{u},\tilde{v})\right\|_{B_T} = \left\|\Psi_1(u,v)-\Psi_1(\tilde{u},\tilde{v})\right\|_1 + \left\|\Psi_2(u,v)-\Psi_2(\tilde{u},\tilde{v})\right\|_1 \le$$

$$\le \left\|\int_0^t \tau^{\sigma_1}\left\|v^p(\cdot,\tau)-\tilde{v}^p(\cdot,\tau)\right\|_{L^\infty\left(R^N\right)} d\tau\right\|_{L^\infty(0,T)} + \left\|\int_0^t \tau^{\sigma_2}\left\|u^q(\cdot,\tau)-\tilde{u}^q(\cdot,\tau)\right\|_{L^\infty\left(R^N\right)} d\tau\right\|_{L^\infty(0,T)} \le$$

$$\le MT^{\sigma+1}\left(\left\|u-\tilde{u}\right\|_1 + \left\|v-\tilde{v}\right\|_1\right) \le MT^{\sigma+1}\left\|(u,\tilde{u})-(v,\tilde{v})\right\|_{B_T} \le \left\|(u,\tilde{u})-(v,\tilde{v})\right\|_{B_T}$$

теңсіздігін аламыз. Мұндағы

$$M = \max\left\{\frac{2^p}{\sigma_1+1}\left\|v_0(x)\right\|^{p-1}_{L^\infty\left(R^N;(0,T)\right)};\frac{2^q}{\sigma_2+1}\left\|u_0(x)\right\|^{q-1}_{L^\infty\left(R^N;(0,T)\right)}\right\},\quad \sigma = \max\{\sigma_1;\sigma_2\}.$$

Ал T параметрінің мәні $MT^{\sigma+1}\le 1$ теңсіздігі орынды болатындай етіп таңдалады.

Онда, Банахтың жылжымайтын нүкте теоремасы бойынша (2.3.1) - (2.3.2) есебінің жалғыз локал шешімі бар екендігі шығады.

2.4 Интегро - дифференциалды диффузия теңдеулер жүйесінің локал интегралдық шешімі

Бұл бөлімде келесі теңдеулер жүйесі

$$\begin{cases} u_t(x,t)-\Delta_x D_{0|t}^{1-\alpha}u(x,t)=\dfrac{1}{\Gamma(1-\gamma)}\displaystyle\int_0^t (t-s)^{-\gamma}|v|^{p-1}v(x,s)ds, \; x\in R^N, \; t>0, \\ v_t(x,t)-\Delta_x D_{0|t}^{1-\beta}v(x,t)=\dfrac{1}{\Gamma(1-\delta)}\displaystyle\int_0^t (t-s)^{-\delta}|u|^{q-1}u(x,s)ds, \; x\in R^N, \; t>0 \end{cases} \tag{2.4.1}$$

үшін

$$u(x,0)=u_0(x)\ge 0, \; v(x,0)=v_0(x)\ge 0, \; x\in R^N \tag{2.4.2}$$

Коши есебін зерттейміз. Мұндағы $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in(0,1)$, $p,q>1$.

2.4.1 - анықтама (Интегралдық шешім) Берілген $u_0(x),\; v_0(x)\in C_0(R^N)$ және $T>0$ үшін

$$\begin{cases} u(x,t)=\displaystyle\int_{R^N} G(x-y,t)u_0(y)dy+\int_0^t\int_{R^N} G(x-y,t-\tau)I_{0|s}^{1-\gamma}\left(|v|^{p-1}v\right)dyd\tau, \\ v(x,t)=\displaystyle\int_{R^N} G(x-y,t)v_0(y)dy+\int_0^t\int_{R^N} G(x-y,t-\tau)I_{0|s}^{1-\delta}\left(|u|^{q-1}u\right)dyd\tau \end{cases} \tag{2.4.3}$$

интегралдық теңдеулер жүйесін қанағаттандыратын (u,v) функциялары (2.4.1) - (2.4.2) есебінің интегралдық шешімі деп аталады. Мұндағы

$$G(x,t)=\frac{1}{(2\pi)^N}\int_{R^N} e^{-i<x,\xi>}E_{\alpha,1}\left(-|\xi|^2 t^\alpha\right)d\xi, \; x\in R^N, \; t>0$$

және $E_{\alpha,1}(z)$ Миттаг - Леффлер функциясы.

2.4.2 - теорема (Локал шешімнің бар болуы) Айталық $u_0(x),\; v_0(x)\in C_0(R^N)$ және $p,q>1$ болсын. Онда (2.4.1) - (2.4.2) есебінің жалғыз $(u,v)\in C_0\left(R^N;C[0,T]\right)\times C_0\left(R^N;C[0,T]\right)$ локал интегралды шешімі бар болады. Мұндағы $T>0$ шешімнің бар болуының максимал уақыты.

Дәлелдеуі: Кез - келген $T>0$ параметрі үшін, келесі түрдегі Банах кеңістігін анықтайық [53]:

$$B_T=\Big\{(u,v)\in C_0\left(R^N;C[0,T]\right)\times C_0\left(R^N;C[0,T]\right);$$

$$\|(u,v)\|_{B_T}\le 2\left(\|u_0\|_{L^\infty(R^N)}+\|v_0\|_{L^\infty(R^N)}\right)\Big\}. \qquad (2.4.4)$$

Мұндағы $\|\cdot\|$ - B_T кеңістігінің нормасы

$$\|(u,v)\|_{B_T}=\|u\|_1+\|v\|_1=\|u\|_{L^\infty\left(R^N;L^\infty(0,T)\right)}+\|v\|_{L^\infty\left(R^N;L^\infty(0,T)\right)}$$

түрінде анықталады.

Сонымен қатар, $(u,v)\in B_T$ үшін

$$\Psi(u,v)=\left(\Psi_1(u,v),\Psi_2(u,v)\right)$$

бейнелеуін енізейік. Мұндағы

$$\Psi_1(u,v)=\int_{R^N}G(x-y,t)u_0(y)dy+\int_0^t\int_{R^N}G(x-y,t-\tau)I_{0|s}^{1-\gamma}\left(|v|^{p-1}v\right)dyd\tau$$

және

$$\Psi_2(u,v)=\int_{R^N}G(x-y,t)v_0(y)dy+\int_0^t\int_{R^N}G(x-y,t-\tau)I_{0|s}^{1-\delta}\left(|u|^{q-1}u\right)dyd\tau$$

арқылы өрнектеледі.

Есептің жалғыз локалды шешімінің бар болуын Банах жылжымайтын нүкте теоремасы негізінде дәлелдейміз.

Алдымен $\Psi:B_T\to B_T$ болатындығын көрсетеміз. Айталық $(u,v)\in B_T$ болсын. Онда (2.1.8) теңдік бойынша

$$\|\Psi(u,v)\|_{B_T}=\|\Psi_1(u,v)\|_{L^\infty\left(R^N;(0,T)\right)}+\|\Psi_2(u,v)\|_{L^\infty\left(R^N;(0,T)\right)}\le$$

$$\le\|u_0\|_{L^\infty(R^N)}+\frac{1}{\Gamma(1-\gamma)}\left\|\int_0^t\int_0^s(s-\tau)^{-\gamma}\|v(\cdot,\tau)\|_{L^\infty(R^N)}^p d\tau ds\right\|_{L^\infty(0,T)}+$$

$$+\|v_0\|_{L^\infty(R^N)}+\frac{1}{\Gamma(1-\delta)}\left\|\int_0^t\int_0^s(s-\tau)^{-\delta}\|u(\cdot,\tau)\|_{L^\infty(R^N)}^q d\tau ds\right\|_{L^\infty(0,T)}\le$$

$$\leq \|u_0\|_{L^\infty(R^N)} + \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \left\| \int_0^t \int_\tau^t (s-\tau)^{-\gamma} \|v(\cdot,\tau)\|_{L^\infty(R^N)}^p d\tau ds \right\|_{L^\infty(0,T)} +$$

$$+\|v_0\|_{L^\infty(R^N)} + \frac{1}{\Gamma(1-\delta)} \left\| \int_0^t \int_\tau^t (s-\tau)^{-\delta} \|u(\cdot,\tau)\|_{L^\infty(R^N)}^q d\tau ds \right\|_{L^\infty(0,T)} \leq$$

$$\leq \|u_0\|_{L^\infty(R^N)} + C_1 T^{2-\gamma} \|v\|_1^p + \|v_0\|_{L^\infty(R^N)} + C_2 T^{2-\delta} \|u\|_1^q$$

бағалауы орынды. Мұндағы

$$C_1 := \frac{1}{(1-\gamma)(2-\gamma)\Gamma(1-\gamma)} = \frac{1}{\Gamma(3-\gamma)},$$

$$C_2 := \frac{1}{(1-\delta)(2-\delta)\Gamma(1-\delta)} = \frac{1}{\Gamma(3-\delta)}.$$

Сәйкесінше, $(u,v) \in B_T$ болғандықтан

$$\|\Psi(u,v)\|_{B_T} \leq \|u_0\|_{L^\infty(R^N)} + C_1 T^{2-\gamma} \|v\|_1^p + \|v_0\|_{L^\infty(R^N)} + C_2 T^{2-\delta} \|u\|_1^q \leq$$

$$\leq \|u_0\|_{L^\infty(R^N)} + \|v_0\|_{L^\infty(R^N)} + \max\left\{ C_1 T^{2-\gamma} \|v\|_1^{p-1} + + C_2 T^{2-\delta} \|u\|_1^{q-1} \right\} \left(\|v\|_1 + \|u\|_1 \right) \leq$$

$$\leq \|u_0\|_{L^\infty(R^N)} + \|v_0\|_{L^\infty(R^N)} + 2T(u_0, v_0) \left(\|u_0\|_{L^\infty(R^N)} + \|v_0\|_{L^\infty(R^N)} \right)$$

теңсіздігі орынды. Мұндағы

$$T(u_0, v_0) = \max\left\{ C_1 T^{2-\gamma} 2^{p-1} \left(\|u_0\|_{L^\infty(R^N)} + \|v_0\|_{L^\infty(R^N)} \right)^{p-1}; \right.$$

$$\left. C_2 T^{2-\delta} 2^{q-1} \left(\|u_0\|_{L^\infty(R^N)} + \|v_0\|_{L^\infty(R^N)} \right)^{q-1} \right\}.$$

Ал T параметрінің мәнін

$$2T(u_0, v_0) \leq 1$$

теңсіздігі орынды болатындай етіп таңдап аламыз. Демек,

$$\left\|\Psi(u,v)\right\|_{B_T} \le 2\left(\left\|u_0\right\|_{L^\infty(R^N)} + \left\|v_0\right\|_{L^\infty(R^N)}\right)$$

теңсіздігі орынды. Бұдан, $\Psi(u,v) \in B_T$ болып табылады.

Енді Ψ бейнелеуінің B_T кеңістігінде сығып бейнелеу болатындығын көрсетеміз. Онда $(u,v),\ (\tilde{u},\tilde{v}) \in B_T$ үшін теореманың алдыңғы бөлігіндегі секілді

$$\left\|\Psi(u,v)-\Psi(\tilde{u},\tilde{v})\right\|_{B_T} = \left\|\Psi_1(u,v)-\Psi_1(\tilde{u},\tilde{v})\right\|_{L^\infty(R^N;(0,T))} + \left\|\Psi_2(u,v)-\Psi_2(\tilde{u},\tilde{v})\right\|_{L^\infty(R^N;(0,T))} \le$$

$$\le \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)}\left\|\int_0^t\int_0^s (s-\tau)^{-\gamma}\left\||v|^{p-1}v(\cdot,\tau)-|\tilde{v}|^{p-1}\tilde{v}(\cdot,\tau)\right\|_{L^\infty(R^N)} d\tau ds\right\|_{L^\infty(0,T)} +$$

$$+\frac{1}{\Gamma(1-\delta)}\left\|\int_0^t\int_0^s (s-\tau)^{-\delta}\left\||u|^{q-1}u(\cdot,\tau)-|\tilde{u}|^{q-1}\tilde{u}(\cdot,\tau)\right\|_{L^\infty(R^N)} d\tau ds\right\|_{L^\infty(0,T)} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)}\left\|\int_0^t\int_\tau^t (s-\tau)^{-\gamma}\left\||v|^{p-1}v(\cdot,\tau)-|\tilde{v}|^{p-1}\tilde{v}(\cdot,\tau)\right\|_{L^\infty(R^N)} d\tau ds\right\|_{L^\infty(0,T)} +$$

$$+\frac{1}{\Gamma(1-\delta)}\left\|\int_0^t\int_\tau^t (s-\tau)^{-\delta}\left\||u|^{q-1}u(\cdot,\tau)-|\tilde{u}|^{q-1}\tilde{u}(\cdot,\tau)\right\|_{L^\infty(R^N)} d\tau ds\right\|_{L^\infty(0,T)} =$$

$$= C_1T^{2-\gamma}\left\||v|^{p-1}v-|\tilde{v}|^{p-1}\tilde{v}\right\|_1 + C_2T^{2-\delta}\left\||u|^{q-1}u-|\tilde{u}|^{q-1}\tilde{u}\right\|_1$$

бағалауын аламыз.

Сонымен қатар,

$$\left||u|^{p-1}u-|v|^{p-1}v\right| \le C(p)|u-v|\left(|u|^{p-1}+|v|^{p-1}\right)$$

теңсіздігі арқылы, жоғарыдағы есептеулерді қайталау нәтижесінде

$$\left\|\Psi(u,v)-\Psi(\tilde{u},\tilde{v})\right\|_{B_T} \le C_1T^{2-\gamma}\left\||v|^{p-1}v-|\tilde{v}|^{p-1}\tilde{v}\right\|_1 + C_2T^{2-\delta}\left\||u|^{q-1}u-|\tilde{u}|^{q-1}\tilde{u}\right\|_1 \le$$

$$\le C(p)C_1T^{2-\gamma}\left(\left\|v^{p-1}\right\|_1+\left\|\tilde{v}^{p-1}\right\|_1\right)\left\|v-\tilde{v}\right\|_1 + C(q)C_2T^{2-\delta}\left(\left\|u^{q-1}\right\|_1+\left\|\tilde{u}^{q-1}\right\|_1\right)\left\|u-\tilde{u}\right\|_1 \le$$

$$\le 2C(p,q)T(u_0,v_0)\left\|(u,v)-(\tilde{u},\tilde{v})\right\|_{B_T} \le \frac{1}{2}\left\|(u,v)-(\tilde{u},\tilde{v})\right\|_{B_T}$$

теңсіздігін аламыз. Мұндағы T параметрінің мәні

$$\max\left\{2C(p,q),1\right\}T(u_0,v_0)\le\frac{1}{2}$$

теңсіздігі орынды болатындай етіп таңдалады.

Онда, Банахтың жылжымайтын нүкте теоремасы бойынша (2.4.1) - (2.4.2) есебінің жалғыз локал шешімі бар екендігі шығады.

2.5 Экспоненциалды бейсызықты диффузия теңдеуінің локал интегралдық шешімі

Бұл бөлімде экспоненциалды бейсызықты диффузия теңдеуі

$$u_t(x,t)-\Delta_x D_{0|t}^{1-\alpha}u(x,t)=\frac{1}{\Gamma(1-\gamma)}\int_0^t (t-s)^{-\gamma}e^{u(x,s)}ds,\;\; x\in R^N,\;\; t>0 \qquad (2.5.1)$$

үшін

$$u(x,0)=u_0(x)\ge 0,\; x\in R^N \qquad (2.5.2)$$

Коши есебі зерттеледі. Мұндағы $\alpha,\gamma\in(0,1)$.

2.5.1 - анықтама (Интегралды шешім) Берілген $u_0(x)\in C_0\left(R^N\right)$ және $T>0$ үшін

$$u(x,t)=\int_{R^N}G(x-y,t)u_0(y)dy+\int_0^t\int_{R^N}G(x-y,t-\tau)I_{0|s}^{1-\gamma}\left(e^u\right)dyd\tau \qquad (2.5.3)$$

интегралдық теңдеуін қанағаттандыратын $u\in C_0\left(R^N;C[0,T]\right)$ функциясы (2.5.1) - (2.5.2) есебінің интегралдық шешімі деп аталады. Мұндағы

$$G(x,t)=\frac{1}{(2\pi)^N}\int_{R^N}e^{-<x,\xi>}E_{\alpha,1}\left(-|\xi|^2t^\alpha\right)d\xi$$

және $E_{\alpha,1}(z)$ Миттаг - Леффлер функциясы.

2.5.2 - теорема (Локал шешімнің бар болуы) Айталық $u_0(x)\in C_0\left(R^N\right)$ болсын. Онда (2.5.1) - (2.5.2) есебінің $u\in C_0\left(R^N;C[0,T)\right)$ жалғыз локал интегралды шешімі болатын $T>0$ максимал уақыт бар болады.

Дәлелдеуі: Кез-келген $T>0$ параметрі үшін шар енгізейік:

$$B_T=\left\{(u,v)\in C_0\left(R^N;C[0,T)\right);\|u\|_1\le 2\|u_0\|_{L^\infty\left(R^N\right)}\right\}. \qquad (2.5.4)$$

Мұндағы $\|\bullet\|_1=\|\bullet\|_{L^\infty\left(R^N;L^\infty(0,T)\right)}$ - B_T кеңістігінің нормасы.

Келесі $u(x,t)\in B_T$ үшін

$$\Psi(u)=\int\limits_{R^N} G(x-y,t)u_0(y)dy+\int\limits_0^t\int\limits_{R^N} G(x-y,t-\tau)I_{0|s}^{1-\gamma}\left(e^u\right)dyd\tau,$$

бейнелеуін анықтайық.

Есептің жалғыз локалды шешімінің бар болуын Банахтың жылжымайтын нүкте теоремасы негізінде дәлелдейміз.

Алдымен $\Psi: B_T\to B_T$ болатындығын көрсетеміз. Айталық $u(x,t)\in B_T$ болсын. Онда (2.5.3) формула мен (2.1.8) теңдік бойынша

$$\left\|\Psi(u)\right\|_{B_T}\le\left\|u_0\right\|_{L^\infty\left(R^N\right)}+\frac{1}{\Gamma(1-\gamma)}\left\|\int\limits_0^t\int\limits_0^s(s-\tau)^{-\gamma}\left\|e^u\right\|_{L^\infty\left(R^N\right)}d\tau ds\right\|_{L^\infty(0,T)}\le$$

$$\le\left\|u_0\right\|_{L^\infty\left(R^N\right)}+\frac{1}{\Gamma(1-\gamma)}\left\|\int\limits_0^t\int\limits_\tau^t(s-\tau)^{-\gamma}\left\|e^u\right\|_{L^\infty\left(R^N\right)}d\tau ds\right\|_{L^\infty(0,T)}\le$$

$$\le\left\|u_0\right\|_{L^\infty\left(R^N\right)}+CT^{2-\gamma}e^{\|u\|_1}\le\left\|u_0(x)\right\|_{L^\infty\left(R^N\right)}+CT^{2-\gamma}e^{2\|u_0\|_{L^\infty\left(R^N\right)}}$$

бағалауын аламыз. Мұндағы

$$C:=\frac{1}{(1-\gamma)(2-\gamma)\Gamma(1-\gamma)}=\frac{1}{\Gamma(3-\gamma)}.$$

Ал T параметрінің мәнін

$$CT^{2-\gamma}e^{2\|u_0\|_{L^\infty\left(R^N\right)}}\le\left\|u_0\right\|_{L^\infty\left(R^N\right)}$$

теңсіздігі орындалатындай етіп таңдап аламыз. Бұдан, $\Psi(u)\in B_T$.

Енді Ψ бейнелеуінің B_T кеңістігінде сығып бейнелеу болатындығын көрсетеміз. Онда, $(u,v)\in B_T$ үшін

$$\left\|\Psi(u)-\Psi(v)\right\|_{B_T}\le\frac{1}{\Gamma(1-\gamma)}\left\|\int\limits_0^t\int\limits_0^s(s-\tau)^{-\gamma}\left\|e^u-e^v\right\|_{L^\infty\left(R^N\right)}d\tau ds\right\|_{L^\infty(0,T)}=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(1-\gamma)}\left\|\int\limits_0^t\int\limits_\tau^t(s-\tau)^{-\gamma}\left\|e^u-e^v\right\|_{L^\infty\left(R^N\right)}d\tau ds\right\|_{L^\infty(0,T)}\le$$

$$\le C_1 T^{2-\gamma}\left\|e^{u}-e^{v}\right\|_1 \le CT^{2-\gamma} e^{2\|u_0\|_{L^\infty(R^N)}}\left\|u-v\right\|_1 \le \frac{1}{2}\left\|u-v\right\|_1$$

бағалауы орынды.

Соңғы теңсіздікте

$$\left|e^{u(s)}-e^{v(s)}\right| \le e^{\lambda u(s)+\mu v(s)}\left|u(s)-v(s)\right|,\quad 0<\lambda,\mu<1,\quad \lambda+\mu=1$$

теңдігін қолдандық. Сонымен қатар T параметрі

$$CT^{2-\gamma} e^{2\|u_0\|_{L^\infty(R^N)}} \le \frac{1}{2}$$

теңсіздігі орынды болатындай етіп таңдалады.

Онда, Банахтың жылжымайтын нүкте теоремасы бойынша (2.5.1) - (2.5.2) есебінің жалғыз локал шешімі бар екендігі шығады.

2.6 Экспоненциалды бейсызықтылықпен берілген диффузия теңдеулер жүйесінің локал интегралдық шешімі

Бұл бөлімде экспоненциалды бейсттызықты диффузия теңдеулер жүйесі

$$\begin{cases} u_t(x,t)-\Delta_x D_{0|t}^{1-\alpha} u(x,t)=\dfrac{1}{\Gamma(1-\gamma)}\displaystyle\int_0^t (t-s)^{-\gamma} e^{v(x,s)}ds,\ \ x\in R^N,\ \ t>0, \\ v_t(x,t)-\Delta_x D_{0|t}^{1-\beta} v(x,t)=\dfrac{1}{\Gamma(1-\delta)}\displaystyle\int_0^t (t-s)^{-\delta} e^{u(x,s)}ds,\ \ x\in R^N,\ \ t>0, \end{cases} \tag{2.6.1}$$

үшін

$$u(x,0)=u_0(x)\ge 0,\ \ v(x,0)=v_0(x)\ge 0,\ \ x\in R^N \tag{2.6.2}$$

Коши есебі зерттеледі. Мұндағы $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in(0,1)$, $p,q>1$.

2.6.1 - анықтама (Интегралдық шешім) Берілген $u_0(x)$, $v_0(x)\in C_0\left(R^N\right)$ және $T>0$ үшін

$$\begin{cases} u(x,t)=\displaystyle\int_{R^N} G(x-y,t)u_0(y)dy+\int_0^t\int_{R^N} G(x-y,t-\tau)I_{0|s}^{1-\gamma}\left(e^{v}\right)dyd\tau, \\ v(x,t)=\displaystyle\int_{R^N} G(x-y,t)v_0(y)dy+\int_0^t\int_{R^N} G(x-y,t-\tau)I_{0|s}^{1-\delta}\left(e^{u}\right)dyd\tau \end{cases} \tag{2.6.3}$$

интегралдық теңдеулер жүйесін қанағаттандыратын $(u,v)\in C_0\left(R^N;C[0,T]\right)\times C_0\left(R^N;C[0,T]\right)$ функциялары (2.6.1) - (2.6.2) есебінің интегралдық шешімі деп аталады. Мұндағы

$$G(x,t)=\frac{1}{(2\pi)^N}\int_{R^N} e^{-<x,\xi>}E_{\alpha,1}\left(-\xi^2t^\alpha\right)d\xi$$

және $E_{\alpha,1}(z)$ Миттаг - Леффлер функциясы.

2.6.2 - теорема (Локал интегралды шешімнің бар болуы) Айталық $u_0(x),\ v_0(x)\in C_0\left(R^N\right)$ және $p,\ q>1$ болсын. Онда (2.6.1) - (2.6.2) есебінің $(u,v)\in C_0\left(R^N;C[0,T)\right)\times C_0\left(R^N;C[0,T)\right)$ жалғыз локал интегралды шешімі болатын, $T>0$ максимал уақыт табылады.

Дәлелдеуі: Кез-келген $T>0$ параметрі үшін, шарды анықтайық:

$$B_T=\Big\{(u,v)\in C_0\left(R^N;C[0,T)\right)\times C_0\left(R^N;C[0,T)\right);$$

$$\|(u,v)\|_{B_T}\le 2\left(\|u_0\|_{L^\infty\left(R^N\right)}+\|v_0\|_{L^\infty\left(R^N\right)}\right)\Big\}. \tag{2.6.4}$$

Мұндағы $\|\bullet\|$ - B_T кеңістігінің нормасы

$$\|(u,v)\|_{B_T}=\|u\|_1+\|v\|_1=\|u\|_{L^\infty\left(R^N;L^\infty(0,T)\right)}+\|v\|_{L^\infty\left(R^N;L^\infty(0,T)\right)}$$

түрінде анықталады.

Сонымен қатар, $(u,v)\in B_T$ үшін

$$\Psi(u,v)=\left(\Psi_1(u,v),\Psi_2(u,v)\right)$$

бейнелеуін анықтайық. Мұндағы

$$\Psi_1(u,v)=\int_{R^N}G(x-y,t)u_0(y)dy+\int_0^t\int_{R^N}G(x-y,t-\tau)I_{0|s}^{1-\gamma}\left(e^v\right)dyd\tau$$

және

$$\Psi_2(u,v)=\int_{R^N}G(x-y,t)v_0(y)dy+\int_0^t\int_{R^N}G(x-y,t-\tau)I_{0|s}^{1-\delta}\left(e^u\right)dyd\tau$$

өрнектері арқылы анықталады.

Есептің жалғыз локалды шешімінің бар болуын Банахтың жылжымайтын нүкте теоремасы негізінде дәлелдейміз.

Алдымен $\Psi: B_T \to B_T$ болатындығын көрсетеміз. Айталық $(u,v)\in B_T$ болсын. Онда (2.6.3) формула мен (2.1.8) теңдік бойынша

$$\left\|\Psi(u,v)\right\|_{B_T} = \left\|\Psi_1(u,v)\right\|_{L^\infty\left(R^N\times(0,T)\right)} + \left\|\Psi_2(u,v)\right\|_{L^\infty\left(R^N\times(0,T)\right)} \le$$

$$\le \left\|u_0\right\|_{L^\infty\left(R^N\right)} + \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)}\left\|\int_0^t\int_0^s (s-\tau)^{-\gamma}\left\|e^v\right\|_{L^\infty\left(R^N\right)} d\tau ds\right\|_{L^\infty(0,T)} +$$

$$+\left\|v_0\right\|_{L^\infty\left(R^N\right)} + \frac{1}{\Gamma(1-\delta)}\left\|\int_0^t\int_0^s (s-\tau)^{-\delta}\left\|e^u\right\|_{L^\infty\left(R^N\right)} d\tau ds\right\|_{L^\infty(0,T)} \le$$

$$\le \left\|u_0\right\|_{L^\infty\left(R^N\right)} + \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)}\left\|\int_0^t\int_\tau^t (s-\tau)^{-\gamma}\left\|e^v\right\|_{L^\infty\left(R^N\right)} d\tau ds\right\|_{L^\infty(0,T)} +$$

$$+\left\|v_0\right\|_{L^\infty\left(R^N\right)} + \frac{1}{\Gamma(1-\delta)}\left\|\int_0^t\int_\tau^t (s-\tau)^{-\delta}\left\|e^u\right\|_{L^\infty\left(R^N\right)} d\tau ds\right\|_{L^\infty[0,T]} \le$$

$$\le \left\|u_0\right\|_{L^\infty\left(R^N\right)} + \left\|v_0\right\|_{L^\infty\left(R^N\right)} + C_1 T^{2-\gamma} e^{\|v\|_1} + C_2 T^{2-\delta} e^{\|u\|_1}$$

бағалауы орынды. Мұндағы

$$C_1 := \frac{1}{(1-\gamma)(2-\gamma)\Gamma(1-\gamma)} = \frac{1}{\Gamma(3-\gamma)},$$

$$C_2 := \frac{1}{(1-\delta)(2-\delta)\Gamma(1-\delta)} = \frac{1}{\Gamma(3-\delta)}.$$

Сәйкесінше, $(u,v)\in B_T$ болғандықтан

$$\left\|\Psi(u,v)\right\|_{B_T} \le \left\|u_0\right\|_{L^\infty\left(R^N\right)} + \left\|v_0\right\|_{L^\infty\left(R^N\right)} + C_1 T^{2-\gamma} e^{\|v\|_1} + C_2 T^{2-\delta} e^{\|u\|_1} \le$$

$$\le \left\|u_0\right\|_{L^\infty\left(R^N\right)} + \left\|v_0\right\|_{L^\infty\left(R^N\right)} + \max\left\{C_1 T^{2-\gamma} e^{\|v\|_1}; C_2 T^{2-\delta} e^{\|u\|_1}\right\} \le$$

$$\le \left\|u_0\right\|_{L^\infty\left(R^N\right)} + \left\|v_0\right\|_{L^\infty\left(R^N\right)} + T_{\gamma,\delta} e^{2\left(\left\|u_0\right\|_{L^\infty\left(R^N\right)} + \left\|v_0\right\|_{L^\infty\left(R^N\right)}\right)}$$

теңсіздігі орынды. Мұндағы

$$T_{\gamma,\delta}=\max\left\{C_1T^{2-\gamma};C_2T^{2-\delta}\right\}.$$

Ал T параметрінің мәнін

$$2T_{\gamma,\delta}\le 1$$

теңсіздігі орынды болатындай етіп таңдап аламыз. Демек,

$$\left\|\Psi(u,v)\right\|_{B_T}\le 2\left(\left\|u_0\right\|_{L^\infty\left(R^N\right)}+\left\|v_0\right\|_{L^\infty\left(R^N\right)}\right)$$

теңсіздігі орынды. Бұдан $\Psi(u,v)\in B_T$ болатындығын аламыз.

Енді Ψ бейнелеуінің B_T кеңістігінде сығып бейнелеу болатындығын көрсетеміз. Онда, (u,v), $(\tilde{u},\tilde{v})\in B_T$ үшін

$$\left\|\Psi(u,v)-\Psi(\tilde{u},\tilde{v})\right\|_{B_T}=\left\|\Psi_1(u,v)-\Psi_1(\tilde{u},\tilde{v})\right\|_{L^\infty\left(R^N\times(0,T)\right)}+\left\|\Psi_2(u,v)-\Psi_2(\tilde{u},\tilde{v})\right\|_{L^\infty\left(R^N\times(0,T)\right)}\le$$

$$\le\frac{1}{\Gamma(1-\gamma)}\left\|\int_0^t\int_0^s(s-\tau)^{-\gamma}\left\|e^v-e^{\tilde{v}}\right\|_{L^\infty\left(R^N\right)}d\tau ds\right\|_{L^\infty(0,T)}+$$

$$+\frac{1}{\Gamma(1-\delta)}\left\|\int_0^t\int_0^s(s-\tau)^{-\delta}\left\|e^u-e^{\tilde{u}}\right\|_{L^\infty\left(R^N\right)}d\tau ds\right\|_{L^\infty(0,T)}=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(1-\gamma)}\left\|\int_0^t\int_\tau^t(s-\tau)^{-\gamma}\left\|e^v-e^{\tilde{v}}\right\|_{L^\infty\left(R^N\right)}d\tau ds\right\|_{L^\infty(0,T)}+$$

$$+\frac{1}{\Gamma(1-\delta)}\left\|\int_0^t\int_\tau^t(s-\tau)^{-\delta}\left\|e^u-e^{\tilde{u}}\right\|_{L^\infty\left(R^N\right)}d\tau ds\right\|_{L^\infty(0,T)}=$$

$$=C_1T^{2-\gamma}\left\|e^v-e^{\tilde{v}}\right\|_1+C_2T^{2-\delta}\left\|e^u-e^{\tilde{u}}\right\|_1$$

бағалауы орынды. Сонымен қатар,

$$\left|e^{u(s)}-e^{v(s)}\right|\le e^{\lambda u(s)+\mu v(s)}\left|u(s)-v(s)\right|,\quad 0<\lambda,\mu<1,\quad \lambda+\mu=1$$

теңдігі арқылы

$$\left\|\Psi(u,v)-\Psi(\tilde{u},\tilde{v})\right\|_{B_T}\le C_1T^{2-\gamma}\left\|e^v-e^{\tilde{v}}\right\|_1+C_2T^{2-\delta}\left\|e^u-e^{\tilde{u}}\right\|_1\le$$

$$\le C_1 T^{2-\gamma} e^{2\left(\|u_0\|_{L^\infty\left(R^N\right)}+\|v_0\|_{L^\infty\left(R^N\right)}\right)} \|v-\tilde{v}\|_1 + C_2 T^{2-\delta} e^{2\left(\|u_0\|_{L^\infty\left(R^N\right)}+\|v_0\|_{L^\infty\left(R^N\right)}\right)} \|u-\tilde{u}\|_1 \le$$

$$\le T_{\gamma,\delta} \left\|(u,v)-(\tilde{u},\tilde{v})\right\|_{B_T} \le \frac{1}{2}\left\|(u,v)-(\tilde{u},\tilde{v})\right\|_{B_T}$$

теңсіздігін аламыз. Мұндағы $T_{\gamma,\delta} \le \frac{1}{2}$.

Онда, Банахтың жылжымайтын нүкте теоремасы бойынша (2.6.1) - (2.6.2) есебінің жалғыз локал шешімі бар екендігі шығады.

3 БӨЛШЕК РЕТТІ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРДІҢ СИНГУЛЯР ШЕШІМДЕРІ

Математикалық физика теңдеулері саласындағы бейсызықты есептер теориясының өзекті бағыттарының бірі глобалды шешілімділік және шешімнің ақырлы уақытта қирауын зерттеу болып табылады.

Бейсызықты теңдеулердің глобалды шешілімділігінің классикалық теориясы негізінен бастапқы және шекаралық есептердің шешілуін қамтамасыз ететін жеткілікті шарттарға негізделген. Бұл жаңа құбылыс Фуджитаның классикалық жұмысынан бастау алып, шешімнің қирауы (blow-up) деген атқа ие болды.

Бейсызықты жылу теңдеуі

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + u^p, \ (x,t) \in R^N \times R_+ \tag{3.0.1}$$

үшін

$$u(x,0) = u_0(x) \geq 0, \ x \in R^N \tag{3.0.2}$$

бастапқы шартпен берілген есепті қарастырайық.

Кез-келген $p \geq 1$ және $u_0(x)$ (сәйкес кластан) үшін болғанда $u(x,t)$ шешімі бар болатындай қандай да бір $T > 0$ табылады. Яғни жоғарыдағы есептің локал шешімі бар болады. Егер біз глобалды шешімнің бар болуы туралы мәселені қарастырсақ (яғни, барлық $t > 0$ үшін), онда ол $p_c = 1 + \frac{2}{N}$ критикалық көрсеткішіне тәуелді болады [11]. Атап айтқанда, егер $1 < p \leq p_c$ болса. онда (3.0.1)-(3.0.2) есебінің кез-келген (тіпті ақырсыз кіші) $u_0(x)$ үшін глобалды шешімі болмайды. Ал, $p > p_c$ болғанда (3.0.1)-(3.0.2) есебінің (t бойынша) оң глобалды шешімі бар болатындай $u_0(x)$ табылады. Бұл нәтижені 1966 жылы жапон математигі Х.Фуджита дәлелдеді және оның құрметіне, мұндай көрсеткіштер «Фуджита критикалық көрсеткіштері» деп аталды.

Бүгінгі таңда Фуджита нәтижелерінің әртүрлі жалпылаулары көптеген еңбектерде зерттелген [12-18]. Сондай-ақ, [19-32] жұмыстарда диффузия теңдеуінің бөлшек аналогтары мен интегралды бейсызықты диффузия теңдеуі үшін Фуджита тектес критикалық көрсеткіштер алынған.

3.1 Полинималды бейсызықтылықпен берілген диффузия теңдеуінің Фуджита тектес критикалық көрсеткіші

Бұл бөлімде интегро-дифференциалды диффузия теңдеуі

$$u_t(x,t) = \Delta_x D_{0|t}^{1-\alpha} u(x,t) + |x|^\rho t^\sigma |u(x,t)|^p, \quad (x,t) \in R^N \times (0,T) \tag{3.1.1}$$

үшін

$$u(x,0)=u_0(x)\geq 0,\quad x\in R^N \qquad (3.1.2)$$

Коши есебі зерттеледі. Мұндағы $\alpha\in(0,1)$ және $\rho,\sigma\geq 0$.

3.1.1 - анықтама (Глобалды әлсіз шешім) Берілген $u_0(x)\in C_0(R^N)$ үшін

$$-\int_{R^N} u_0(x)\varphi(x,0)\,dx-\int_0^\infty\int_{R^N}|x|^\rho t^\sigma |u(x,t)|^p\varphi(x,t)\,dxdt=$$

$$=\int_0^\infty\int_{R^N} u(x,t)\mathbf{D}_{t|T}^{1-\alpha}\Delta_x\varphi(x,t)\,dxdt+\int_0^\infty\int_{R^N} u(x,t)\varphi_t(x,t)\,dxdt \qquad (3.1.3)$$

интегралдық теңдеуді қанағаттандыратын $u(x,t)\in L_{loc}^1(R^N;(0,\infty))$ функциясы (3.1.1) - (3.1.2) есебінің глобалды әлсіз шешімі деп аталады. Мұндағы $\varphi(x,t)\in C_{x,t}^{2,1}(R^N;[0,T])$ және $\varphi(x,T)=0$.

3.1.2 - теорема Айталық $u_0(x)\in C_0(R^N)$ және $u_0(x)\geq 0,\ u_0(x)\not\equiv 0$ болсын. Егер

$$1<p\leq p_c=1+\frac{2(\sigma+1)+\rho\alpha}{\alpha N},\quad \rho\geq 0,\quad \sigma>-1$$

болса, онда (3.1.1) - (3.1.2) есебінің әлсіз шешімі ақырлы уақытта қирайды.

Дәлелдеуі: Теорема кері жору арқылы дәлелденетін болады.

Айталық $u(x,t)$ функциясы (3.1.1) - (3.1.2) есебінің уақыт бойынша глобалды шешімі болсын. Онда, кез - келген $T^*>0$ үшін $u(x,t)$ функциясы $(0,T^*)$ интервалында анықталған. Сонымен қатар, T, R және θ параметрлері $0<TR^{2/\theta}<T^*$ теңсіздіктерін қанағаттандыратын нақты оң сандар болсын.

Берілген $\varphi(x,t)$ функциясын [54]

$$\int_0^{TR^{2/\theta}}\int_{R^N}\left|\mathbf{D}_{t|TR^{2/\theta}}^{1-\alpha}\Delta_x\varphi(x,t)\right|^{p'}(h\varphi)^{-p'/p}(x,t)\,dxdt<\infty,$$

$$\int_0^{TR^{2/\theta}}\int_{R^N}|\varphi_t(x,t)|^{p'}(h\varphi)^{-p'/p}(x,t)\,dxdt<\infty \qquad (3.1.4)$$

орындалатындай етіп таңдап алайық. Мұндағы $h(x,t)=|x|^\rho t^\sigma$.

(3.1.3) теңдіктің оң жақ бөлігіндегі интегралдарды

$$\int_0^{TR^{2/\theta}}\int_{R^N} u(x,t)\mathbf{D}^{1-\alpha}_{t|TR^{2/\theta}}\Delta_x\varphi(x,t)\,dxdt=\int_0^{TR^{2/\theta}}\int_{R^N} u(x,t)(h\varphi)^{1/p}(x,t)\mathbf{D}^{1-\alpha}_{t|TR^{2/\theta}}\Delta_x\varphi(x,t)(h\varphi)^{-1/p}(x,t)\,dxdt$$

және

$$\int_0^{TR^{2/\theta}}\int_{R^N} u(x,t)\varphi_t(x,t)\,dxdt=\int_0^{TR^{2/\theta}}\int_{R^N} u(x,t)(h\varphi)^{1/p}(x,t)\varphi_t(x,t)(h\varphi)^{-1/p}(x,t)\,dxdt$$

түрінде өрнектеп аламыз.

Алынған теңдіктердің оң жағына Юнг теңсіздігін

$$XY\le\varepsilon X^p+C(\varepsilon)Y^{p'},\quad \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1,\ \ X\ge 0,\ \ Y\ge 0,$$

қолдану арқылы

$$\int_0^{TR^{2/\theta}}\int_{R^N} u(x,t)\mathbf{D}^{1-\alpha}_{t|TR^{2/\theta}}\Delta_x\varphi(x,t)\,dxdt\le\varepsilon\int_0^{TR^{2/\theta}}\int_{R^N}|u(x,t)|^p(h\varphi)(x,t)\,dxdt+$$

$$+C(\varepsilon)\int_0^{TR^{2/\theta}}\int_{R^N}\left|\mathbf{D}^{1-\alpha}_{t|T}\Delta_x\varphi(x,t)\right|^{p'}(h\varphi)^{-p'/p}(x,t)\,dxdt$$

және

$$\int_0^{TR^{2/\theta}}\int_{R^N} u(x,t)\varphi_t(x,t)\,dxdt\le\varepsilon\int_0^{TR^{2/\theta}}\int_{R^N}|u(x,t)|^p(h\varphi)(x,t)\,dxdt+$$

$$+C(\varepsilon)\int_0^{TR^{2/\theta}}\int_{R^N}|\varphi_t(x,t)|^{p'}(h\varphi)^{-p'/p}(x,t)\,dxdt$$

бағалауларын аламыз.

Онда, жоғарыдағы бағалаудан келесі теңсіздікті аламыз:

$$\int_0^{TR^{2/\theta}}\int_{R^N} h(x,t)|u(x,t)|^p\varphi(x,t)\,dxdt\le$$

$$\le C(\varepsilon)\int_0^{TR^{2/\theta}}\int_{R^N}\left[\left|\mathbf{D}^{1-\alpha}_{t|TR^{2/\theta}}\Delta_x\varphi(x,t)\right|^{p'}+|\varphi_t(x,t)|^{p'}\right](h\varphi)^{-p'/p}(x,t)\,dxdt.\qquad(3.1.5)$$

Айталық $\varphi(x,t)$ функциясы

$$\varphi(x,t)=\Phi\left(\frac{|x|^2+t^\theta}{R^2}\right)$$

түрінде жазылсын. Мұндағы $R,\theta\in Z^+$ және $\Phi(z)$ тегіс өспейтін функция

$$\Phi(z)=\begin{cases}1 & \text{егер } z\le 1,\\ \searrow & \text{егер } 1<z<2,\ \ 0\le\Phi(z)\le 1.\\ 0 & \text{егер } z\ge 2,\end{cases}$$

Келесі кезекте, x және t айнымалыларын $t=\tau R^{2/\theta},\ x=yR$ өрнектері арқылы алмастырып

$$\Omega:=\left\{(y,\tau)\in R^N\times\left(0,T/R^{2/\theta}\right),\ |y|^2+\tau^\theta<2\right\},\ \ \mu(y,\tau)=|y|^2+\tau^\theta$$

енгізейік. Онда,

$$\int_0^{TR^{2/\theta}}\int_{R^N}\left|\mathbf{D}^{1-\alpha}_{t|TR^{2/\theta}}\Delta_x\varphi(x,t)\right|^{p'}(h\varphi)^{-p'/p}(x,t)\,dxdt=$$

$$=\int_0^{TR^{2/\theta}}\int_{R^N}\left|-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{\tau R^{2/\theta}}^{TR^{2/\theta}}(s-t)^{\alpha-1}\Delta_x\varphi_s(x,s)ds\right|^{p'}(h\varphi)^{-p'/p}(x,t)\,dxdt=$$

$$\le R^{\frac{2}{\theta}(\alpha-1)p'-2p'-\left(\frac{2}{\theta}\sigma+\rho\right)\frac{p'}{p}+\frac{2}{\theta}+N}\int_\Omega\left|\mathbf{D}^{1-\alpha}_{t|T}\left(\Delta_x\Phi_\tau\circ\mu\right)\right|^{p'}h^{-p'/p}(y,\tau)(\Phi\circ\mu)^{-p'/p}\,dyd\tau$$

және

$$\int_0^{TR^{2/\theta}}\int_{R^N}|\varphi_t(x,t)|^{p'}(h\varphi)^{-p'/p}(x,t)\,dxdt\le$$

$$\le R^{-\frac{2}{\theta}p'-\left(\frac{2}{\theta}\sigma+\rho\right)\frac{p'}{p}+\frac{2}{\theta}+N}\int_\Omega\left|(\Phi_\tau\circ\mu)\right|^{p'}h^{-p'/p}(y,\tau)(\Phi\circ\mu)^{-p'/p}\,dyd\tau$$

теңсіздіктері орынды.

Онда, бірінші және екінші теңсіздіктердің оң жақтарындағы R - дің дәрежелерін теңестіру арқылы

$$\frac{2}{\theta}(\alpha-1)p'-2p'-\left(\frac{2}{\theta}\sigma+\rho\right)\frac{p'}{p}+\frac{2}{\theta}+N=-\frac{2}{\theta}p'-\left(\frac{2}{\theta}\sigma+\rho\right)\frac{p'}{p}+\frac{2}{\theta}+N,$$

$\theta = \alpha$ теңдігін аламыз.
Онда (3.1.5) теңсіздігі

$$\int_0^{TR^{2/\alpha}} \int_{R^N} h(x,t)|u(x,t)|^p \varphi(x,t)\,dxdt \le CR^\lambda \tag{3.1.6}$$

түрінде жазылады. Мұндағы

$$\lambda = \frac{2}{\alpha}(\alpha-1)p' - 2p' - \left(\frac{2}{\alpha}\sigma + \rho\right)\frac{p'}{p} + \frac{2}{\alpha} + N$$

және

$$C = C(\varepsilon)\int_\Omega \left(\left| \mathbf{D}^{1-\alpha}_{\tau|TR^{2/\alpha}} \left(\Delta_y \Phi_\tau \circ \mu \right) \right|^{p'} + \left| (\Phi_\tau \circ \mu) \right|^{p'} \right) h^{-p'/p}(y,\tau)(\Phi \circ \mu)^{-p'/p}\,dyd\tau.$$

Айталық $\lambda < 0$ (яғни $p < p_c$) болсын. Егер (3.1.6) теңсіздігінде $R \to \infty$ болса, онда

$$\int_0^{TR^{2/\alpha}} \int_{R^N} h(x,t)|u(x,t)|^p\,dxdt \le 0 \tag{3.1.7}$$

теңсіздігі орынды. Демек, $u(x,t) = 0$. Ал бұл қарама - қайшылық.

Айталық, $\lambda = 0$ (яғни $p = p_c$) болсын. Онда (3.1.6) формуладағы интегралдың жинақтылығынан

$$\Omega_R := \left\{ (x,t) \in R^N \times (0,T),\ \mathrm{R}^2 < |x|^2 + t^\alpha < 2R^2 \right\}$$

облысында

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Omega_R} h(x,t)|u(x,t)|^p \varphi(x,t)\,dxdt = 0 \tag{3.1.8}$$

теңдігі орынды. (3.1.6) өрнегінің сол жағына Гельдер теңсіздігін қолдану арқылы

$$\int_0^{TR^{2/\alpha}} \int_{R^N} h(x,t)|u(x,t)|^p \varphi(x,t)\,dxdt \le L\left(\int_{\Omega_R} h(x,t)|u(x,t)|^p \varphi(x,t)\,dxdt \right)^{1/p} \tag{3.1.9}$$

аламыз. Мұндағы

$$L:=\left(\int_{\Omega_1}\left|D_{\tau|T}^{1-\alpha}\left(\Phi_{\tau yy}\circ\mu\right)\right|^{p'}\left(\Phi\circ\mu\right)^{-p'/p}dyd\tau\right)^{1/p'}+\left(\int_{\Omega_1}\left|\left(\Phi_{\tau}\circ\mu\right)\right|^{p'}\left(\Phi\circ\mu\right)^{-p'/p}dyd\tau\right)^{1/p'}$$

және

$$\Omega_1=\left\{(y,\ \tau)\in R^N\times\left(0,T/R^{2/\alpha}\right):1<|y|^2+\tau^\alpha<2\right\}.$$

Енді (3.1.9) теңсіздігін негізге ала отырып, (3.1.8) теңдігінің көмегімен $R\to\infty$ болса, онда

$$\int_0^{TR^{2/\alpha}}\int_{R^N}h(x,t)|u(x,t)|^p\,dxdt=0$$

орынды болатындығын аламыз.

Бұдан, $u(x,t)=0$ екендігі шығады. Ал бұл қарама - қайшылық. Теорема дәлелденді.

3.2 Полинималды бейсызықты диффузия теңдеулер жүйесі шешімінің қирауы

Келесі түрдегі полинималды бейсызықты диффузия теңдеулер жүйесі

$$\begin{cases}u_t(x,t)-\Delta_x D_{0|t}^{1-\alpha}u(x,t)=|x|^{\rho_1}t^{\sigma_1}v^p(x,t), & x\in R^N,\ t>0,\\ v_t(x,t)-\Delta_x D_{0|t}^{1-\beta}v(x,t)=|x|^{\rho_2}t^{\sigma_2}u^q(x,t), & x\in R^N,\ t>0\end{cases}\tag{3.2.1}$$

үшін

$$u(x,0)=u_0(x)\ge 0,\ \ v(x,0)=v_0(x)\ge 0,\ \ x\in R^N\tag{3.2.2}$$

Коши есебі зерттеледі. Мұндағы $0<\alpha,\beta<1,\ p,q>1$ және $\rho_1,\rho_2\ge 0,\ \ \sigma_1,\sigma_2>-1.$

3.2.1 - анықтама (Әлсіз шешім) Берілген $u_0(x),\ v_0(x)\in L^1_{loc}\left(R^N\right)$ және $T>0$ үшін

$$-\int_{R^N}u_0(x)\xi(x,0)dx-\int_0^T\int_{R^N}|x|^{\rho_1}t^{\sigma_1}v^p(x,t)\xi(x,t)dxdt=$$

$$=\int_0^T\int_{R^N}u(x,t)\mathbf{D}_{t|T}^{1-\alpha}\Delta_x\xi(x,t)dxdt+\int_0^T\int_{R^N}u(x,t)\xi_t(x,t)dxdt\tag{3.2.3}$$

және

$$-\int_{R^N} v_0(x)\psi(x,0)dx-\int_0^T\int_{R^N}|x|^{\rho_2} t^{\sigma_2}u^q(x,t)\psi(x,t)dxdt=$$

$$=\int_0^T\int_{R^N} v(x,t)\mathbf{D}_{t|T}^{1-\alpha}\Delta_x\psi(x,t)dxdt+\int_0^T\int_{R^N} v(x,t)\psi_t(x,t)dxdt \qquad (3.2.4)$$

интегралдық теңдеулерін қанағаттандыратын $(u,v)\in L_{loc}^{\infty}\left(R^N;L_{loc}^q(0,T)\right)\times L_{loc}^{\infty}\left(R^N;L_{loc}^p(0,T)\right)$ функциялары (3.2.1) - (3.2.2) есебінің әлсіз шешімі деп аталады. Мұндағы $\xi(x,t),\ \psi(x,t)\in C_{x,t}^{2,1}\left(R^N;[0,T]\right)$ және $\varphi(x,T)=\psi(x,T)=0.$

3.2.2 - теорема Айталық, $p,q>1$ және

$$1\le N\le \max\left\{\frac{l_1+ql_2}{q};\frac{pl_1+l_2}{p}\right\},$$

болсын. Мұндағы $p+p'=pp',\ q+q'=qq'$ үшін

$$l_1=\frac{2}{\beta}+\frac{1}{p}\left(\frac{2}{\beta}\sigma_1+\rho_1\right)-\frac{1}{p'}\left(\frac{2}{\beta}+N\right),$$

$$l_2=\frac{2}{\alpha}+\frac{1}{q}\left(\frac{2}{\alpha}\sigma_2+\rho_2\right)-\frac{1}{q'}\left(\frac{2}{\alpha}+N\right).$$

Онда (3.2.1) - (3.2.2) есебінің әлсіз шешімі ақырлы уақытты қирайды.

Дәлелдеуі: Теорема кері жору арқылы дәлелденетін болады.

Айталық $u(x,t),\ v(x,t)$ функциялары (3.2.1) - (3.2.2) есебінің уақыт бойынша глобалды шешімдері болсын. Онда, кез - келген $T^*>0$ үшін $u(x,t),\ v(x,t)$ функциялары $\left(0,T^*\right)$ интервалында анықталған. Сонымен қатар, $T,\ R$ және $\theta_1,\ \theta_2$ параметрлері $0<TR^{2/\theta_i}<T^*,\ i=1,2$ теңсіздіктерін қанағаттандыратын нақты оң сандар болсын.

Берілген $\xi(x,t),\ \psi(x,t)$ функциялар

$$\xi(x,t)=\Phi\left(\frac{|x|^2+t^{\theta_1}}{R^2}\right),\ \ \psi(x,t)=\Phi\left(\frac{|x|^2+t^{\theta_2}}{R^2}\right)$$

түрінде таңдалып алынсын. Мұндағы $R,\theta_1,\theta_2\in Z^+,\ \Phi(z)$ тегіс өспейтін функция

$$\Phi(z)=\begin{cases}1 & \text{егер } z\le 1,\\ \searrow & \text{егер } 1<z<2,\ 0\le\Phi(z)\le 1.\\ 0 & \text{егер } z\ge 2,\end{cases}$$

Сонымен қатар, $\xi(x,t)$, $\psi(x,t)$ функциялары үшін

$$\int_0^{TR^{2/\theta_1}}\int_{R^N}\left|\mathbf{D}^{1-\alpha}_{t|TR^{2/\theta_1}}\Delta_x\xi(x,t)\right|^{q'}(h_2\psi)^{-q'/q}(x,t)\,dxdt<\infty,$$

$$\int_0^{TR^{2/\theta_1}}\int_{R^N}\left|\xi_t(x,t)\right|^{q'}(h\psi)^{-q'/q}(x,t)\,dxdt<\infty \tag{3.2.5}$$

және

$$\int_0^{TR^{2/\theta_2}}\int_{R^N}\left|\mathbf{D}^{1-\beta}_{t|TR^{2/\theta_2}}\Delta_x\psi(x,t)\right|^{p'}(h_1\xi)^{-p'/p}(x,t)\,dxdt<\infty,$$

$$\int_0^{TR^{2/\theta_2}}\int_{R^N}\left|\psi_t(x,t)\right|^{p'}(h_1\xi)^{-p'/p}(x,t)\,dxdt<\infty \tag{3.2.6}$$

теңсіздіктері орынды болсын. Онда (3.2.3) теңдіктің оң жақ бөлігіндегі интегралдарды

$$\int_0^{TR^{2/\theta_1}}\int_{R^N}u(x,t)\mathbf{D}^{1-\alpha}_{t|TR^{2/\theta_1}}\Delta_x\xi(x,t)\,dxdt=\int_0^{TR^{2/\theta_1}}\int_{R^N}u(x,t)(h_2\psi)^{1/q}(x,t)\mathbf{D}^{1-\alpha}_{t|TR^{2/\theta_1}}\Delta_x\xi(x,t)(h_2\psi)^{-1/q}(x,t)\,dxdt$$

және

$$\int_0^{TR^{2/\theta_1}}\int_{R^N}u(x,t)\xi_t(x,t)\,dxdt=\int_0^{TR^{2/\theta_1}}\int_{R^N}u(x,t)(h_2\psi)^{1/q}(x,t)\xi_t(x,t)(h_2\psi)^{-1/q}(x,t)\,dxdt$$

түрінде өрнектеп аламыз.
Алынған теңдіктердің оң жағына ε Юнг теңсіздігін

$$XY\le\varepsilon X^q+C(\varepsilon)Y^{q'},\quad \frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1,\ \ X\ge 0,\ \ Y\ge 0,$$

қолдану арқылы

$$\int_0^{TR^{2/\theta_1}}\int_{R^N}u(x,t)\mathbf{D}^{1-\alpha}_{t|TR^{2/\theta_1}}\Delta_x\xi(x,t)\,dxdt\le\varepsilon\int_0^{TR^{2/\theta_1}}\int_{R^N}\left|u(x,t)\right|^q(h_2\psi)(x,t)\,dxdt+$$

$$+C(\varepsilon)\int_0^{TR^{2/\theta_1}}\int_{R^N}\left|\mathbf{D}^{1-\alpha}_{t|TR^{2/\theta_1}}\Delta_x\xi(x,t)\right|^{q'}(h_2\psi)^{-q'/q}(x,t)\,dxdt$$

және

$$\int_0^{TR^{2/\theta_1}}\int_{R^N}u(x,t)\xi_t(x,t)\,dxdt\le\varepsilon\int_0^{TR^{2/\theta_1}}\int_{R^N}|u(x,t)|^q(h_2\psi)(x,t)\,dxdt+$$

$$+C(\varepsilon)\int_0^{TR^{2/\theta_1}}\int_{R^N}|\xi_t(x,t)|^{q'}(h_2\psi)^{-q'/q}(x,t)\,dxdt$$

бағалауларын аламыз.
Сәйкесінше, теңдеулер жүйесінің екінші бөлігі үшін де

$$\int_0^{TR^{2/\theta_2}}\int_{R^N}v(x,t)\mathbf{D}^{1-\beta}_{t|TR^{2/\theta_2}}\Delta_x\psi(x,t)\,dxdt\le\varepsilon\int_0^{TR^{2/\theta_2}}\int_{R^N}|v(x,t)|^p(h_1\xi)(x,t)\,dxdt+$$

$$+C(\varepsilon)\int_0^{TR^{2/\theta_2}}\int_{R^N}\left|\mathbf{D}^{1-\beta}_{t|TR^{2/\theta_2}}\Delta_x\psi(x,t)\right|^{p'}(h_1\xi)^{-p'/p}(x,t)\,dxdt$$

және

$$\int_0^{TR^{2/\theta_2}}\int_{R^N}v(x,t)\psi_t(x,t)\,dxdt\le\varepsilon\int_0^{TR^{2/\theta_2}}\int_{R^N}|v(x,t)|^p(h_1\xi)(x,t)\,dxdt+$$

$$+C(\varepsilon)\int_0^{TR^{2/\theta_2}}\int_{R^N}|\psi_t(x,t)|^{p'}(h_1\xi)^{-p'/p}(x,t)\,dxdt$$

теңсіздіктері орынды. Онда жоғарыдағы бағалаулардан келесі теңсіздіктерді аламыз:

$$\int_0^{TR^{2/\theta_1}}\int_{R^N}h_2(x,t)|u(x,t)|^q\psi(x,t)\,dxdt\le$$

$$\le C(\varepsilon)\int_0^{TR^{2/\theta_1}}\int_{R^N}\left\{\left|\mathbf{D}^{1-\alpha}_{t|TR^{2/\theta_1}}\Delta_x\xi(x,t)\right|^{q'}+|\xi_t(x,t)|^{q'}\right\}(h_2\psi)^{-q'/q}(x,t)\,dxdt \qquad (3.2.7)$$

және

$$\int_0^{TR^{2/\theta_2}} \int_{R^N} h_1(x,t)|v(x,t)|^p \xi(x,t)\,dxdt \le$$

$$\le C(\varepsilon) \int_0^{TR^{2/\theta_2}} \int_{R^N} \left\{ \left| \mathbf{D}^{1-\beta}_{t|TR^{2/\theta_2}} \Delta_x \psi(x,t) \right|^{p'} + |\psi_t(x,t)|^{p'} \right\} (h_1\xi)^{-p'/p}(x,t)\,dxdt.$$

(3.2.3) теңдіктің оң жағына Гельдер теңсіздігін қолдану арқылы

$$\int_0^{TR^{2/\theta_1}} \int_{R^N} u(x,t)\mathbf{D}^{1-\alpha}_{t|TR^{2/\theta_1}} \Delta_x \xi(x,t)\,dxdt \le \left(\int_0^{TR^{2/\theta_1}} \int_{R^N} |u(x,t)|^q (h_2\psi)(x,t)\,dxdt \right)^{1/q} \times$$

$$\times \left(\int_0^{TR^{2/\theta_1}} \int_{R^N} \left| \mathbf{D}^{1-\alpha}_{t|TR^{2/\theta_1}} \Delta_x \xi(x,t) \right|^{q'} (h_2\psi)^{-q'/q}(x,t)\,dxdt \right)^{1/q'}$$

және

$$\int_0^{TR^{2/\theta_1}} \int_{R^N} u(x,t)\xi_t(x,t)\,dxdt \le \left(\int_0^{TR^{2/\theta_1}} \int_{R^N} |u(x,t)|^q (h_2\psi)(x,t)\,dxdt \right)^{1/q} \times$$

$$\times \left(\int_0^{TR^{2/\theta_1}} \int_{R^N} |\xi_t(x,t)|^{q'} (h_2\psi)^{-q'/q}(x,t)\,dxdt \right)^{1/q'}$$

теңсіздіктерін аламыз. Онда, (3.2.3) теңдік бойынша

$$\int_0^{TR^{2/\theta_1}} \int_{R^N} u(x,t)\mathbf{D}^{1-\alpha}_{t|TR^{2/\theta_1}} \Delta_x \xi(x,t)\,dxdt + \int_0^{TR^{2/\theta_1}} \int_{R^N} u(x,t)\xi_t(x,t)\,dxdt =$$

$$= \int_0^{TR^{2/\theta_1}} \int_{R^N} h_1(x,t)|v(x,t)|^p \xi(x,t)\,dxdt \le \left(\int_0^{TR^{2/\theta_1}} \int_{R^N} |u(x,t)|^q (h_2\psi)(x,t)\,dxdt \right)^{1/q} \cdot A \qquad (3.2.8)$$

орынды. Мұндағы

$$A := \left(\int_0^{TR^{2/\theta_1}} \int_{R^N} \left| \mathbf{D}^{1-\alpha}_{t|TR^{2/\theta_1}} \Delta_x \xi(x,t) \right|^{q'} (h_2\psi)^{-q'/q}(x,t)\,dxdt \right)^{1/q'} + \left(\int_0^{TR^{2/\theta_1}} \int_{R^N} |\xi_t(x,t)|^{q'} (h_2\psi)^{-q'/q}(x,t)\,dxdt \right)^{1/q'}.$$

Сәйкесінше жүйенің екінші бөлігі үшін келесі теңсіздік орынды:

$$\int_0^{TR^{2/\theta_2}}\int_{R^N} h_2(x,t)\left|u(x,t)\right|^q \psi(x,t)\,dxdt \le \left(\int_0^{TR^{2/\theta_2}}\int_{R^N}\left|v(x,t)\right|^p (h_1\xi)(x,t)\,dxdt\right)^{1/p}\cdot B. \qquad (3.2.9)$$

Мұндағы

$$B := \left(\int_0^{TR^{2/\theta_2}}\int_{R^N}\left|\mathbf{D}^{1-\beta}_{t|TR^{2/\theta_2}}\Delta_x\psi(x,t)\right|^{p'}(h_1\xi)^{-p'/p}(x,t)\,dxdt\right)^{1/p'} + \left(\int_0^{TR^{2/\theta_2}}\int_{R^N}\left|\psi_t(x,t)\right|^{p'}(h_1\xi)^{-p'/p}(x,t)\,dxdt\right)^{1/p'}.$$

Онда, (3.2.8) - (3.2.9) теңсіздіктерінен

$$\left(\int_0^{TR^{2/\theta_1}}\int_{R^N} h_1(x,t)\left|v(x,t)\right|^p \xi(x,t)\,dxdt\right)^{1-\frac{1}{pq}} \le B^{1/q}\cdot A \qquad (3.2.10)$$

және

$$\left(\int_0^{TR^{2/\theta_2}}\int_{R^N} h_2(x,t)\left|u(x,t)\right|^q \psi(x,t)\,dxdt\right)^{1-\frac{1}{pq}} \le A^{1/p}\cdot B \qquad (3.2.11)$$

бағалауларын аламыз.

Енді $x,\, t$ айнымалыларын A интегралында $t=\tau R^{2/\theta_1}$, $x=yR$ және B интегралында $t=\tau R^{2/\theta_2}$, $x=yR$ өрнектері арқылы алмастырып

$$\Sigma_i := \left\{(y,\tau)\in R^N\times\left(0,T/R^{2/\theta_i}\right),\ |y|^2+\tau^{\theta_i}<2\right\},\ \mu := |y|^2+\tau^{\theta_i},\ i=1,2,\ \ \mu(y,\tau)=|y|^2+\tau^{\theta}$$

енгізейік. Онда,

$$\left(\int_0^{TR^{2/\theta_1}}\int_{R^N}\left|\mathbf{D}^{1-\alpha}_{t|TR^{2/\theta_1}}\Delta_x\xi(x,t)\right|^{q'}(h_2\psi)^{-q'/q}(x,t)\,dxdt\right)^{1/q'}$$

$$=\left(\int_0^{TR^{2/\theta_1}}\int_{R^N}\left|-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{\tau R^{2/\theta_1}}^{TR^{2/\theta_1}}(s-t)^{\alpha-1}\Delta_x\xi_s(x,s)ds\right|^{q'}(h_2\psi)^{-q'/q}(x,t)\,dxdt\right)^{1/q'} \le$$

$$\le R^{\frac{2}{\theta_1}(\alpha-1)-2-\frac{1}{q}\left(\frac{2}{\theta_1}\sigma_2+\rho_2\right)+\frac{1}{q'}\left(\frac{2}{\theta_1}+N\right)}\left(\int_{\Sigma_1}\left|\mathbf{D}^{1-\alpha}_{\tau|T}\left(\Delta_y\Phi_\tau\circ\mu\right)\right|^{q'} h_2^{-q'/q}(y,\tau)(\Phi\circ\mu)^{-q'/q}\,dyd\tau\right)^{1/q'}$$

және

$$\left(\int_0^{TR^{2/\theta_1}} \int_{R^N} \left| \xi_t(x,t) \right|^{q'} (h_2\psi)^{-q'/q}(x,t)\, dxdt \right)^{1/q'} \leq$$

$$\leq R^{-\frac{2}{\theta_1} - \frac{1}{q}\left(\frac{2}{\theta_1}\sigma_2 + \rho_2 \right) + \frac{1}{q'}\left(\frac{2}{\theta_1} + N \right)} \left(\int_{\Sigma_1} \left| (\Phi_\tau \circ \mu) \right|^{q'} h_2^{-q'/q}(y,\tau)(\Phi \circ \mu)^{-q'/q}\, dyd\tau \right)^{1/q'}$$

теңсіздіктерін аламыз.

Онда, жоғарыдағы теңсіздіктердің оң жақтарындағы $R -$дің дәрежелерін теңестіру арқылы

$$\frac{2}{\theta_1}(\alpha - 1) - 2 - \frac{1}{q}\left(\frac{2}{\theta_1}\sigma_2 + \rho_2 \right) + \frac{1}{q'}\left(\frac{2}{\theta_1} + N \right) = -\frac{2}{\theta_1} - \frac{1}{q}\left(\frac{2}{\theta_1}\sigma_2 + \rho_2 \right) + \frac{1}{q'}\left(\frac{2}{\theta_1} + N \right)$$

$\theta_1 = \alpha$ теңдігі шығады. Сәйкесінше, $\theta_2 = \beta.$

Келесі кезекте (3.2.10) - (3.2.11) теңсіздіктерін ескеріп

$$\left(\int_0^{TR^{2/\alpha}} \int_{R^N} h_1(x,t) \left| v(x,t) \right|^p \xi(x,t)\, dxdt \right)^{1-\frac{1}{pq}} \leq C_1 \left(R^{-l_1} \right)^{1/q} R^{-l_2}$$

және

$$\left(\int_0^{TR^{2/\beta}} \int_{R^N} h_2(x,t) \left| u(x,t) \right|^q \psi(x,t)\, dxdt \right)^{1-\frac{1}{pq}} \leq C_2 R^{-l_1} \left(R^{-l_2} \right)^{1/p}$$

бағалауларын аламыз. Мұндағы $p + p' = pp',\ q + q' = qq'$ және

$$l_1 = \frac{2}{\beta} + \frac{1}{p}\left(\frac{2}{\beta}\sigma_1 + \rho_1 \right) - \frac{1}{p'}\left(\frac{2}{\beta} + N \right),$$

$$l_2 = \frac{2}{\alpha} + \frac{1}{q}\left(\frac{2}{\alpha}\sigma_2 + \rho_2 \right) - \frac{1}{q'}\left(\frac{2}{\alpha} + N \right).$$

Онда, келесі теңсіздіктер де орынды:

$$\left(\int_0^{TR^{2/\alpha}} \int_{R^N} h_1(x,t) \left| v(x,t) \right|^p \xi(x,t)\, dxdt \right)^{1-\frac{1}{pq}} \leq C_1 R^{-(l_1/q + l_2)}, \tag{3.2.12}$$

$$\left(\int_0^{TR^{2/\beta}}\int_{R^N} h_2(x,t)\left|u(x,t)\right|^q \psi(x,t)\,dxdt\right)^{1-\frac{1}{pq}} \le C_1 R^{-(l_1+l_2/p)}. \qquad (3.2.13)$$

Мұндағы

$$C_1 = C(\varepsilon)\left[\int_{\Sigma_2}\left(\left|\mathbf{D}^{1-\beta}_{t|TR^{2/\beta}}\left(\Delta_y\Phi_\tau\circ\mu\right)\right|^{p'} + \left|\left(\Delta_y\Phi_\tau\circ\mu\right)\right|^{p'}\right)h_1^{-p'/p}(y,\tau)(\Phi\circ\mu)^{-p'/p}\,dyd\tau\right]^{1/q}$$

$$\times\int_{\Sigma_1}\left(\left|\mathbf{D}^{1-\alpha}_{t|TR^{2/\alpha}}\left(\Delta_y\Phi_\tau\circ\mu\right)\right|^{q'} + \left|\left(\Delta_y\Phi_\tau\circ\mu\right)\right|^{q'}\right)h_1^{-q'/q}(y,\tau)(\Phi\circ\mu)^{-q'/q}\,dyd\tau$$

және

$$C_1 = C(\varepsilon)\int_{\Sigma_2}\left(\left|\mathbf{D}^{1-\beta}_{t|TR^{2/\beta}}\left(\Delta_y\Phi_\tau\circ\mu\right)\right|^{p'} + \left|\left(\Delta_y\Phi_\tau\circ\mu\right)\right|^{p'}\right)h_1^{-p'/p}(y,\tau)(\Phi\circ\mu)^{-p'/p}\,dyd\tau$$
$$\times\left[\int_{\Sigma_1}\left(\left|\mathbf{D}^{1-\alpha}_{t|TR^{2/\alpha}}\left(\Delta_y\Phi_\tau\circ\mu\right)\right|^{q'} + \left|\left(\Delta_y\Phi_\tau\circ\mu\right)\right|^{q'}\right)h_1^{-q'/q}(y,\tau)(\Phi\circ\mu)^{-q'/q}\,dyd\tau\right]^{1/p}.$$

Айталық $-(l_1/q+l_2)<0$ (яғни $p<p_c$) болсын. Егер (3.2.12) теңсіздіктегі $R\to\infty$ болса, онда

$$\left(\int_0^{TR^{2/\alpha}}\int_{R^N} h_1(x,t)\left|v(x,t)\right|^p \xi(x,t)\,dxdt\right)^{1-\frac{1}{pq}} \le 0 \qquad (3.2.14)$$

теңсіздігін аламыз. Яғни, $v(x,t)=0$. Ал бұл қарама - қайшылық.

Айталық $-(l_1/q+l_2)=0$ (яғни $p=p_c$) болсын. Онда (3.2.12) формуладағы интегралдың жинақтылығынан

$$\Sigma_R := \left\{(x,t)\in R^N\times(0,T),\ \mathrm{R}^2<|x|^2+t^\alpha<2R^2\right\}$$

облысында

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\Sigma_R} h(x,t)\left|u(x,t)\right|^p \varphi(x,t)\,dxdt = 0 \qquad (3.2.15)$$

теңдігі орынды. (3.2.7) теңсіздігіне Гельдер теңсіздігін қолдану арқылы

$$\int_0^{TR^{2/\alpha}} \int_{R^N} h_1(x,t)|v(x,t)|^p \xi(x,t)\,dxdt \le L\left(\int_{\Sigma_R} h_1(x,t)|u(x,t)|^p \xi(x,t)\,dxdt\right)^{1/p} \qquad (3.2.16)$$

аламыз. Мұндағы

$$L := \left(\int_{\Sigma^1} \left|\mathbf{D}^{1-\alpha}_{t|TR^{2/\alpha}}\left(\Delta_y \Phi_\tau \circ \mu\right)\right|^{p'} h_1^{-p'/p}(y,\tau)(\Phi\circ\mu)^{-p'/p}\,dyd\tau\right)^{1/p'} +$$

$$+\left(\int_{\Sigma^1} \left|(\Phi_\tau \circ \mu)\right|^{p'} h_1^{-p'/p}(y,\tau)(\Phi\circ\mu)^{-p'/p}\,dyd\tau\right)^{1/p'}$$

және

$$\Sigma^1 = \left\{(y,\ \tau)\in R^N \times \left(0, T/R^{2/\alpha}\right) : 1<|y|^2+\tau^\alpha<2\right\}.$$

Енді (3.2.16) теңсіздігін негізге ала отырып, (3.2.15) теңдігіндегі $R\to\infty$ болса, онда

$$\int_0^{TR^{2/\alpha}} \int_{R^N} h_1(x,t)|v(x,t)|^p \xi(x,t)\,dxdt = 0$$

орынды болатындығын аламыз.

Бұдан, $v(x,t)=0$ екендігі шығады. Ал бұл қарама - қайшылық.

Сонымен қатар $l_1/q+l_2\ge 0$ жағдайы үшін

$$N \le \frac{2\left(\alpha(1+\sigma_1)+p\beta(1+\sigma_2)\right)+\alpha\beta(\rho_1+p\rho_2)}{\alpha\beta(pq-1)} \qquad (3.2.17)$$

және (3.2.11) теңсіздік бойынша

$$N \le \frac{2\left(\beta(1+\sigma_2)+q\alpha(1+\sigma_1)\right)+\alpha\beta(q\rho_1+\rho_2)}{\alpha\beta(pq-1)} \qquad (3.2.18)$$

орынды. Онда (3.2.17) - (3.2.18) теңсіздіктерінен

$$1\le N \le \max\left\{\frac{2\left(\alpha(1+\sigma_1)+p\beta(1+\sigma_2)\right)+\alpha\beta(\rho_1+p\rho_2)}{\alpha\beta(pq-1)};\right.$$

$$\left.\frac{2\left(\beta\left(1+\sigma_2\right)+q\alpha\left(1+\sigma_1\right)\right)+\alpha\beta\left(q\rho_1+\rho_2\right)}{\alpha\beta\left(pq-1\right)}\right\}$$

нәтижесін аламыз. Теорема дәлелденді.

3.3 Интегро-дифференциалды диффузия теңдеулер жүйесінің Фуджита тектес критикалық көрсеткіші

Бұл бөлімде интегро-дифференциалды диффузия теңдеулер жүйесі

$$\begin{cases} u_t\left(x,t\right)-\Delta_x D_{0|t}^{1-\alpha}u\left(x,t\right)=\dfrac{1}{\Gamma\left(1-\gamma\right)}\displaystyle\int_0^t\left(t-s\right)^{-\gamma}\left|v\right|^{p-1}v\left(x,s\right)ds,\;\; x\in R^N,\;\; t>0, \\ v_t\left(x,t\right)-\Delta_x D_{0|t}^{1-\beta}v\left(x,t\right)=\dfrac{1}{\Gamma\left(1-\delta\right)}\displaystyle\int_0^t\left(t-s\right)^{-\delta}\left|u\right|^{q-1}u\left(x,s\right)ds,\;\; x\in R^N,\;\; t>0 \end{cases} \qquad (3.3.1)$$

үшін

$$u\left(x,0\right)=u_0\left(x\right)\geq 0,\;\; v\left(x,0\right)=v_0\left(x\right)\geq 0,\;\; x\in R^N \qquad (3.3.2)$$

Коши есебі зерттеледі. Мұндағы $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in(0,1)$, $p,q>1$.

3.3.1 – анықтама (Әлсіз шешім) Берілген $u_0\left(x\right)$, $v_0\left(x\right)\in L_{loc}^{\infty}\left(R^N\right)$ және $T>0$ үшін

$$\int_{R^N}u_0\left(x\right)\xi\left(x,0\right)dx+\int_0^T\int_{R^N}I_{0|t}^{1-\gamma}\left(v^p\right)\xi\left(x,t\right)dxdt=$$

$$=-\int_0^T\int_{R^N}u\left(x,t\right)\mathbf{D}_{t|T}^{1-\alpha}\Delta_x\xi\left(x,t\right)dxdt-\int_0^T\int_{R^N}u\left(x,t\right)\xi_t\left(x,t\right)dxdt \qquad (3.3.3)$$

және

$$\int_{R^N}v_0\left(x\right)\psi\left(x,0\right)dx+\int_0^T\int_{R^N}I_{0|t}^{1-\delta}\left(u^q\right)\psi\left(x,t\right)dxdt=$$

$$=-\int_0^T\int_{R^N}v\left(x,t\right)\mathbf{D}_{t|T}^{1-\beta}\Delta_x\psi\left(x,t\right)dxdt-\int_0^T\int_{R^N}v\left(x,t\right)\psi_t\left(x,t\right)dxdt \qquad (3.3.4)$$

интегралдық теңдеулерін қанағаттандыратын $\left(u,v\right)\in L_{loc}^{\infty}\left(R^N;L^q\left(0,T\right)\right)\times L_{loc}^{\infty}\left(R^N;L^p\left(0,T\right)\right)$ функциялары (3.3.1) - (3.3.2) есебінің әлсіз шешімі деп аталады. Мұндағы $\xi\left(x,t\right)$, $\psi\left(x,t\right)\in C_{x,t}^{2,1}\left(R^N;\left[0,T\right]\right)$ және $\xi\left(x,T\right)=\psi\left(x,T\right)=0$.

3.3.2 - теорема Айталық $p,q>1$ және

$$\frac{N}{2}\le \max\left\{\frac{(2-\delta)p+(1-\gamma)pq}{pq-1};\frac{(2-\gamma)q+(1-\delta)pq+1}{pq-1}\right\}$$

болсын. Онда (3.3.1) - (3.3.2)) есебінің әлсіз шешімі ақырлы уақытта қирайды.
Дәлелдеуі: Теорема кері жору арқылы дәлелденеді.
Айталық $u(x,t),\, v(x,t)$ функциялары (3.2.1) - (3.2.2) есебінің уақыт бойынша глобалды шешімдері болсын.

Берілген $\xi(x,t)$, $\psi(x,t)$ функциялары

$$\xi(x,t)=D_{t|T}^{1-\gamma}\tilde{\xi}(x,t):=D_{t|T}^{1-\gamma}\left(\xi_1^l(x)\xi_2(t)\right),$$

$$\psi(x,t)=D_{t|T}^{1-\delta}\tilde{\psi}(x,t):=D_{t|T}^{1-\delta}\left(\xi_1^l(x)\xi_2(t)\right)$$

ретінде алынсын. Мұндағы

$$\xi_1(x)=\Phi\left(\frac{|x|}{T^{1/2}}\right),\quad \xi_2(t)=\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\eta}$$

мұндағы $l\ge\dfrac{pq}{(p-1)(q-1)}$, $\eta>1$ және $\Phi(z)$ тегіс өспейтін функция

$$\Phi(z)=\begin{cases}1 & \text{егер } z\le 1,\\ \searrow & \text{егер } 1<z<2,\ 0\le\Phi(z)\le 1,\ z|\Phi'(z)|\le C_1.\\ 0 & \text{егер } z\ge 2,\end{cases}$$

Онда, (1.1.6) теңдігі бойынша

$$\int_{\Omega}u_0(x)D_{t|T}^{1-\gamma}\tilde{\xi}(x,0)+\int_{\Omega_T}I_{0|t}^{1-\gamma}\left(v^p\right)D_{t|T}^{1-\gamma}\tilde{\xi}=-\int_{\Omega_T}u\Delta_x\mathbf{D}_{t|T}^{1-\alpha}D_{t|T}^{1-\gamma}\tilde{\xi}-\int_{\Omega_T}uDD_{t|T}^{1-\gamma}\tilde{\xi}\qquad(3.3.5)$$

және

$$\int_{\Omega}v_0(x)D_{t|T}^{1-\delta}\tilde{\xi}(x,0)+\int_{\Omega_T}I_{0|t}^{1-\delta}\left(u^q\right)D_{t|T}^{1-\delta}\tilde{\xi}=-\int_{\Omega_T}v\Delta_x\mathbf{D}_{t|T}^{1-\beta}D_{t|T}^{1-\delta}\tilde{\xi}-\int_{\Omega_T}vDD_{t|T}^{1-\delta}\tilde{\xi}\qquad(3.3.6)$$

орынды. Мұндағы

$$\Omega_T=[0,T]\times\Omega,\ \ \Omega=\left\{x\in R^N;|x|\le 2T^{1/2}\right\},\ \ \int_{\Omega_T}=\int_{\Omega_T}dxdt,\ \ \int_{\Omega}=\int_{\Omega}dx.$$

Енді, (3.3.5) - (3.3.6) теңдіктерінің сол жағына 1.1.17 - қасиет және (1.1.6), ал оң жағына 1.1.18 - қасиетті қолдану арқылы

$$CT^{\gamma-1}\int_{\Omega} u_0\xi_1^l + \int_{\Omega_T} D_{0|t}^{1-\gamma}\left[I_{0|t}^{1-\gamma}v^p\right]\tilde{\xi} = -\int_{\Omega_T} u\Delta_x \mathbf{D}_{t|T}^{1-\alpha} D_{t|T}^{1-\gamma}\tilde{\xi} + \int_{\Omega_T} uD_{t|T}^{2-\gamma}\tilde{\xi}$$

және

$$CT^{\delta-1}\int_{\Omega} v_0\xi_1^l + \int_{\Omega_T} D_{0|t}^{1-\delta}\left[I_{0|t}^{1-\delta}u^q\right]\tilde{\xi} = -\int_{\Omega_T} v\Delta_x \mathbf{D}_{t|T}^{1-\beta} D_{t|T}^{1-\delta}\tilde{\xi} + \int_{\Omega_T} vD_{t|T}^{2-\delta}\tilde{\xi}$$

теңдіктерін аламыз.
Бұдан, 1.1.16 - қасиет бойынша

$$\int_{\Omega_T} v^p\tilde{\xi} + CT^{\gamma-1}\int_{\Omega} u_0\xi_1^l = -\int_{\Omega_T} u\Delta_x \mathbf{D}_{t|T}^{1-\alpha} D_{t|T}^{1-\gamma}\tilde{\xi} + \int_{\Omega_T} uD_{t|T}^{2-\gamma}\tilde{\xi}$$

және

$$\int_{\Omega_T} u^q\tilde{\xi} + CT^{\delta-1}\int_{\Omega} v_0\xi_1^l = -\int_{\Omega_T} v\Delta_x \mathbf{D}_{t|T}^{1-\beta} D_{t|T}^{1-\delta}\tilde{\xi} + \int_{\Omega_T} vD_{t|T}^{2-\delta}\tilde{\xi}$$

теңдіктері орынды. Онда, 1.1.20 - қасиетті қолдану арқылы

$$\int_{\Omega_T} v^p\tilde{\xi} + CT^{\gamma-1}\int_{\Omega} u_0\xi_1^l \le C\int_{\Omega_T} u\xi_1^{l-1}\left|\left(-\Delta_x\right)\xi_1 \mathbf{D}_{t|T}^{1-\alpha} D_{t|T}^{1-\gamma}\xi_2\right| + \int_{\Omega_T} u\xi_1^l D_{t|T}^{2-\gamma}\xi_2 \le$$

$$\le C\int_{\Omega_T} u\tilde{\xi}^{-1/q}\tilde{\xi}^{1/q}\xi_1^{l-1}\left|\left(-\Delta_x\right)\xi_1 \mathbf{D}_{t|T}^{1-\alpha} D_{t|T}^{1-\gamma}\xi_2\right| + \int_{\Omega_T} u\tilde{\xi}^{-1/q}\tilde{\xi}^{1/q}\xi_1^l D_{t|T}^{2-\gamma}\xi_2 \qquad (3.3.7)$$

және

$$\int_{\Omega_T} u^q\tilde{\xi} + CT^{\delta-1}\int_{\Omega} v_0\xi_1^l \le C\int_{\Omega_T} v\xi_1^{l-1}\left|\left(-\Delta_x\right)\xi_1 \mathbf{D}_{t|T}^{1-\beta} D_{t|T}^{1-\delta}\xi_2\right| - \int_{\Omega_T} v\xi_1^l D_{t|T}^{2-\delta}\xi_2 \le$$

$$\le C\int_{\Omega_T} v\tilde{\xi}^{-1/p}\tilde{\xi}^{1/p}\xi_1^{l-1}\left|\left(-\Delta_x\right)\xi_1 \mathbf{D}_{t|T}^{1-\beta} D_{t|T}^{1-\delta}\xi_2\right| - \int_{\Omega_T} v\tilde{\xi}^{-1/p}\tilde{\xi}^{1/p}\xi_1^l D_{t|T}^{2-\delta}\xi_2 \qquad (3.3.8)$$

теңсіздіктерін аламыз.

Сонымен қатар, $u_0, v_0 \ge 0$ екендігін ескеріп (3.3.7) және (3.3.8) теңсіздіктерінің оң жақ бөліктеріне Гельдер теңсіздігін қолдану арқылы

$$\int_{\Omega_T} v^p \tilde{\xi} \le \left(\int_{\Omega_T} u^q \tilde{\xi} \right)^{1/q} \cdot A \qquad (3.3.9)$$

және

$$\int_{\Omega_T} u^q \tilde{\xi} \le \left(\int_{\Omega_T} v^p \tilde{\xi} \right)^{1/p} \cdot B \qquad (3.3.10)$$

бағалауларын аламыз. Мұндағы $p' = \dfrac{p}{p-1}$, $q' = \dfrac{q}{q-1}$ және

$$A := C\left(\int_{\Omega_T} \xi_1^{l-q'} \xi_2^{-\frac{1}{q-1}} \left| \Delta_x \xi_1 \mathbf{D}_{t|T}^{1-\alpha} D_{t|T}^{1-\gamma} \xi_2 \right|^{q'} \right)^{1/q'} + C\left(\int_{\Omega_T} \xi_1^{l} \xi_2^{-\frac{1}{q-1}} \left| D_{t|T}^{2-\gamma} \xi_2 \right|^{q'} \right)^{1/q'},$$

$$B := C\left(\int_{\Omega_T} \xi_1^{l-p'} \xi_2^{-\frac{1}{p-1}} \left| \Delta_x \xi_1 \mathbf{D}_{t|T}^{1-\beta} D_{t|T}^{1-\delta} \xi_2 \right|^{p'} \right)^{1/p'} + C\left(\int_{\Omega_T} \xi_1^{l} \xi_2^{-\frac{1}{p-1}} \left| D_{t|T}^{2-\delta} \xi_2 \right|^{p'} \right)^{1/p'}.$$

Онда, (3.3.7) - (3.3.8) теңсіздіктерінің комбинациясынан келесі бағалаулар орынды:

$$\left(\int_{\Omega_T} v^p \tilde{\xi} \right)^{1-1/pq} \le B^{1/q} \cdot A,$$

$$\left(\int_{\Omega_T} u^q \tilde{\xi} \right)^{1-1/pq} \le A^{1/p} \cdot B. \qquad (3.3.11)$$

Енді, x және t айнымалыларын $x = T^{\frac{1}{2}} y$ және $t = T\tau$ өрнектерімен алмастыру арқылы

$$A := CT^{\left[(\gamma-2)q' + \left(1+\frac{N}{2}\right)\right]\frac{1}{q'}} + CT^{\left[(-1+\alpha+\gamma-2)q' + \left(1+\frac{N}{2}\right)\right]\frac{1}{q'}},$$

$$B := CT^{\left[(\delta-2)p' + \left(1+\frac{N}{2}\right)\right]\frac{1}{p'}} + CT^{\left[(-1+\beta+\delta-2)p' + \left(1+\frac{N}{2}\right)\right]\frac{1}{p'}}$$

нәтижелерін аламыз.

Кез келген $0 < \alpha, \beta, \gamma, \delta < 1$ үшін

$$\gamma - 2 > -1 + \alpha + \gamma - 2$$

және

$$\delta-2>-1+\beta+\delta-2$$

орынды болады.

Сонымен қатар, (1.1.1), (1.1.2) теңдіктерін (3.3.9) теңсіздігінің оң жақ бөлігіне қолдану арқылы

$$\left(\int_{\Omega_T} v^p\tilde{\xi}\right)^{1-1/pq} \le CT^{\theta_1},$$

$$\left(\int_{\Omega_T} u^q\tilde{\xi}\right)^{1-1/pq} \le CT^{\theta_2} \tag{3.3.12}$$

теңсіздіктеріне ие боламыз. Мұндағы

$$\theta_1 := \left(\left(\delta-2\right)p'+\left(1+\frac{N}{2}\right)\right)\frac{1}{p'q}+\left(\left(\gamma-2\right)q'+\left(1+\frac{N}{2}\right)\right)\frac{1}{q'} \tag{3.3.13}$$

және

$$\theta_2 := \left(\left(\gamma-2\right)q'+\left(1+\frac{N}{2}\right)\right)\frac{1}{pq'}+\left(\left(\delta-2\right)p'+\left(1+\frac{N}{2}\right)\right)\frac{1}{p'}. \tag{3.3.14}$$

Демек, келесі үш жағдайды қарастыруымыз қажет.

- $\theta_1<0$ (сәйкесінше $\theta_2<0$): (3.3.10) теңсіздіктегі $T\to\infty$ болса, онда

$$\lim_{T\to\infty}\int_0^T\int_{|x|\le 2T^{1/2}} v^p\tilde{\xi}=0 \text{ және } \lim_{T\to\infty}\int_0^T\int_{|x|\le 2T^{1/2}} u^q\tilde{\xi}=0$$

аламыз.

Онда Лебег теоремасынан және $T\to\infty$ үшін $\tilde{\xi}(x,t)\to 1$ екендігін ескеріп

$$\int_0^T\int_{R^N} v^p=0 \Rightarrow v\equiv 0 \text{ және } \int_0^T\int_{R^N} u^q=0 \Rightarrow u\equiv 0$$

теңдігін аламыз. Ал бұл қарама - қайшылық.

- $\theta_1=0$ (сәйкесінше $\theta_2=0$): (3.3.10) теңсіздігіндегі $T\to\infty$ болса, онда

$$v\in L^{p}\left(\left(0,\infty\right);L^{p}\left(R^{N}\right)\right) \text{ және } u\in L^{q}\left(\left(0,\infty\right);L^{q}\left(R^{N}\right)\right) \tag{3.3.15}$$

болатындығын аламыз.

Онда [55] жұмыстың идеасы негізінде, тест функцияны

$$\xi_1(x):=\Phi\left(\frac{|x|}{B^{-1/2}T^{1/2}}\right)$$

түрінде таңдап аламыз. Мұндағы $1\le B<T$ жеткілікті дәрежеде үлкен, егер $T\to\infty$ болса, онда бір мезетте $B\to\infty$ ұмтыла алмайды.

Жоғарыдағы есептеуді қайталау арқылы, $\Delta_x\xi_1$ функциясының тасымалдаушысын ескере отырып, келесі белгілеулерді енізейік:

$$\Sigma_B:=\left[0,T\right]\times\left\{x\in R^{N};|x|\le 2B^{-1/2}T^{1/2}\right\},$$

$$\Omega_B:=\left[0,T\right]\times\left\{x\in R^{N};B^{-1/2}T^{1/2}\le|x|\le 2B^{-1/2}T^{1/2}\right\}.$$

Онда, (3.3.5) және (3.3.6) теңсіздіктері секілді

$$\int_{\Sigma_B} v^p\tilde{\xi}dxdt\le C\int_{\Sigma_B} u\tilde{\xi}^{1/q}\tilde{\xi}^{-1/q}\xi_1^{l}\left|D_{t|T}^{2-\gamma}\xi_2\right|dxdt+C\int_{\Omega_B} u\tilde{\xi}^{1/q}\tilde{\xi}^{-1/q}\xi_1^{l-1}\left|\left(-\Delta_x\right)\xi_1\mathbf{D}_{t|T}^{1-\alpha}D_{t|T}^{1-\gamma}\xi_2\right|dxdt \tag{3.3.16}$$

және

$$\int_{\Sigma_B} u^q\tilde{\xi}dxdt\le C\int_{\Sigma_B} v\tilde{\xi}^{1/p}\tilde{\xi}^{-1/p}\xi_1^{l}\left|D_{t|T}^{2-\delta}\xi_2\right|dxdt+C\int_{\Omega_B} v\tilde{\xi}^{1/p}\tilde{\xi}^{-1/p}\xi_1^{l-1}\left|\left(-\Delta_x\right)\xi_1\mathbf{D}_{t|T}^{1-\beta}D_{t|T}^{1-\delta}\xi_2\right|dxdt \tag{3.3.17}$$

теңсіздіктеріне ие боламыз.

Екінші жағынан, (u,v) глобалды шешім болғандықтан, $u(x,t)$ және $v(x,t)$ функциялары (3.3.3) және (3.3.4) теңдіктерін қанағаттандырады, атап айтқанда Ω_B облысында:

$$\int_{\Omega_B} v^p\tilde{\xi}dxdt\le C\int_{\Omega_B} u\tilde{\xi}^{1/q}\tilde{\xi}^{-1/q}\xi_1^{l}\left|D_{t|T}^{2-\gamma}\xi_2\right|dxdt+C\int_{\Omega_B} u\tilde{\xi}^{1/q}\tilde{\xi}^{-1/q}\xi_1^{l-1}\left|\left(-\Delta_x\right)\xi_1\mathbf{D}_{t|T}^{1-\alpha}D_{t|T}^{1-\gamma}\xi_2\right|dxdt \tag{3.3.18}$$

$$\int_{\Omega_B} u^q\tilde{\xi}dxdt\le C\int_{\Omega_B} v\tilde{\xi}^{1/p}\tilde{\xi}^{-1/p}\xi_1^{l}\left|D_{t|T}^{2-\delta}\xi_2\right|dxdt+C\int_{\Omega_B} v\tilde{\xi}^{1/p}\tilde{\xi}^{-1/p}\xi_1^{l-1}\left|\left(-\Delta_x\right)\xi_1\mathbf{D}_{t|T}^{1-\beta}D_{t|T}^{1-\delta}\xi_2\right|dxdt \tag{3.3.19}$$

болып табылады.

Келесі белгілеулерді енгізейік:

$$\begin{cases} U_1 := \int\limits_{\Sigma_B} u^q \tilde{\xi} dxdt, \\ U_2 := \int\limits_{\Omega_B} u^q \tilde{\xi}\, dxdt \end{cases}$$

және

$$\begin{cases} V_1 := \int\limits_{\Sigma_B} v^p \tilde{\xi} dxdt, \\ V_2 := \int\limits_{\Omega_B} v^p \tilde{\xi}\, dxdt. \end{cases}$$

(3.3.16) - (3.3.17) және (3.3.18) - (3.3.19) теңсіздіктеріне Гельдер теңсіздігін қолдану арқылы

$$\begin{cases} V_1 \le U_1^{1/q} A_1 + U_2^{1/q} C_1, \\ U_1 \le V_1^{1/p} B_1 + V_2^{1/p} C_2 \end{cases} \tag{3.3.20}$$

және

$$\begin{cases} V_2 \le U_2^{1/q} A_2 + U_2^{1/q} C_1, \\ U_2 \le V_2^{1/p} B_2 + V_2^{1/p} C_2 \end{cases} \tag{3.3.21}$$

нәтижелерін аламыз. Мұндағы

$$A_1 := C\left(\int\limits_{\Sigma_B} \xi_1^l \xi_2^{-\frac{1}{q-1}} \left| D_{t|T}^{2-\gamma} \xi_2 \right|^{q'} dxdt \right)^{1/q'},$$

$$A_1 := C\left(\int\limits_{\Omega_B} \xi_1^l \xi_2^{-\frac{1}{q-1}} \left| D_{t|T}^{2-\gamma} \xi_2 \right|^{q'} dxdt \right)^{1/q'},$$

$$B_1 := C\left(\int\limits_{\Sigma_B} \xi_1^l \xi_2^{-\frac{1}{p-1}} \left| D_{t|T}^{2-\delta} \xi_2 \right|^{p'} dxdt \right)^{1/p'},$$

$$B_2 := C\left(\int\limits_{\Omega_B} \xi_1^l \xi_2^{-\frac{1}{p-1}} \left| D_{t|T}^{2-\delta} \xi_2 \right|^{p'} dxdt \right)^{1/p'},$$

$$C_1 := C\left(\int\limits_{\Omega_B} \xi_1^{l-q'} \xi_2^{-\frac{1}{q-1}} \left| \left(-\Delta_x\right) \xi_1 \mathbf{D}_{t|T}^{1-\alpha} D_{t|T}^{1-\gamma} \xi_2 \right|^{q'} dxdt \right)^{1/q'},$$

$$C_2 := C\left(\int_{\Omega_B} \xi_1^{l-p'} \xi_2^{-\frac{1}{p-1}} \left| \left(-\Delta_x\right) \xi_1 \mathbf{D}_{t|T}^{1-\beta} D_{t|T}^{1-\delta} \xi_2 \right|^{p'} dxdt \right)^{1/q'} .$$

(3.3.20) - (3.3.21) теңсіздіктерінің комбинциясыларынан

$$V_1 \le V_1^{1/pq} B_1^{1/q} A_1 + V_2^{1/pq} C_2^{1/q} A_1 + V_2^{1/pq} B_2^{1/q} C_1 + V_2^{1/pq} C_2^{1/q} C_1 \qquad (3.3.22)$$

және

$$U_1 \le U_1^{1/pq} A_1^{1/p} B_1 + U_2^{1/pq} C_1^{1/p} B_1 + U_2^{1/pq} A_2^{1/p} C_2 + U_2^{1/pq} U_1^{1/p} C_2 \qquad (3.3.23)$$

теңсіздіктері орынды.

(3.3.22) - (3.3.23) теңсіздіктерінің оң жақ бөлігінің бірінші қосылғышын бағалайық. Ол үшін Юнг теңсіздігі

$$ab \le \frac{1}{pq} a^{pq} + \frac{pq-1}{pq} b^{-\frac{pq}{pq-1}}, \; p > 1, \; q > 1$$

бойынша

$$a = V_1^{1/pq}, \; b = B_1^{1/q} A_1$$

және

$$a = U_1^{1/pq}, b = A_1^{1/p} B_1$$

арқылы, сәйкесінше

$$\left(1 - \frac{1}{pq}\right) V_1 \le \frac{pq-1}{pq} B_1^{\frac{p}{pq-1}} A_1^{\frac{pq}{pq-1}} + V_2^{\frac{1}{pq}} \left[C_2^{\frac{1}{q}} A_1 + B_2^{\frac{1}{q}} C_1 + C_2^{\frac{1}{q}} C_1 \right]$$

және

$$\left(1 - \frac{1}{pq}\right) U_1 \le \frac{pq-1}{pq} A_1^{\frac{q}{pq-1}} B_1^{\frac{pq}{pq-1}} + U_2^{\frac{1}{pq}} \left[C_1^{\frac{1}{p}} B_1 + A_2^{\frac{1}{p}} C_2 + C_1^{\frac{1}{p}} C_2 \right]$$

бағалауларын аламыз.

$\xi(x,t)$ фунциясының анықтамасынан және A_i, B_i, C_i $(i = 1,2)$ интегралдарында $t = \tau T, \; x = \chi B^{-1/2} T^{1/2}$ алмасытруларын енгізу арқылы

$$V_1 \le CT^{\theta_1 \frac{pq}{pq-1}} B^{\eta_1 \frac{pq}{pq-1}} + V_2^{\frac{1}{pq}} \left[CT^{\theta_1} B^{\eta_2} + CT^{\theta_1} B^{\eta_3} + CT^{\theta_1} B^{\eta_4} \right]$$

және

$$U_1 \le CT^{\theta_2 \frac{pq}{pq-1}} B^{\mu_1 \frac{pq}{pq-1}} + U_2^{\frac{1}{pq}} \left[CT^{\theta_1} B^{\mu_2} + CT^{\theta_1} B^{\mu_3} + CT^{\theta_1} B^{\mu_4} \right]$$

теңсіздіктеріне ие боламыз. Мұндағы:

$$\begin{cases} \eta_1 := -\dfrac{N}{2}\left(\dfrac{1}{p'q} + \dfrac{1}{q'} \right), \\ \eta_2 := \dfrac{1}{q} - \dfrac{N}{2}\left(\dfrac{1}{p'q} + \dfrac{1}{q'} \right), \\ \eta_3 := 1 - \dfrac{N}{2}\left(\dfrac{1}{p'q} + \dfrac{1}{q'} \right), \\ \eta_4 := 1 + \dfrac{1}{q} - \dfrac{N}{2}\left(\dfrac{1}{p'q} + \dfrac{1}{q'} \right) \end{cases}$$

және

$$\begin{cases} \mu_1 := -\dfrac{N}{2}\left(\dfrac{1}{pq'} + \dfrac{1}{p'} \right), \\ \mu_2 := \dfrac{1}{p} - \dfrac{N}{2}\left(\dfrac{1}{pq'} + \dfrac{1}{p'} \right), \\ \mu_3 := 1 - \dfrac{N}{2}\left(\dfrac{1}{pq'} + \dfrac{1}{p'} \right), \\ \mu_4 := 1 + \dfrac{1}{p} - \dfrac{N}{2}\left(\dfrac{1}{pq'} + \dfrac{1}{p'} \right). \end{cases}$$

Айталық, $\theta_1 = 0$ ($\theta_2 = 0$) болсын. Онда келесі теңсіздіктер орынды:

$$\begin{cases} V_1 \le CB^{\eta_1 \frac{pq}{pq-1}} + V_2^{\frac{1}{pq}} \left[CB^{\eta_2} + CB^{\eta_3} + CB^{\eta_4} \right], \\ U_1 \le CB^{\mu_1 \frac{p}{pq-1}} + U_2^{\frac{1}{pq}} \left[CB^{\mu_2} + CB^{\mu_3} + CB^{\mu_4} \right]. \end{cases} \tag{3.3.24}$$

Демек, $v \in L^p\left(R^N; L^p(0,\infty)\right)$ және $u \in L^q\left(R^N; L^q(0,\infty)\right)$ функциялары үшін

$$\lim_{T\to\infty} V_2 = 0 \text{ және } \lim_{T\to\infty} U_2 = 0$$

теңдігін аламыз.

(3.3.24) теңсіздік және Лебег теоремасы негізінде $T\to\infty$ үшін

$$\int_0^T\int_{R^N} v^p dxdt \le CB^{\eta_1\frac{pq}{pq-1}},$$
$$\int_0^T\int_{R^N} u^q dxdt \le CB^{\mu_1\frac{pq}{pq-1}} \tag{3.3.25}$$

теңсіздіктерін аламыз.

Сонымен қатар, $\eta_1<0$ және $\mu_1<0$ үшін (3.3.25) теңсіздіктен $B\to\infty$ болса, онда u және v функцияларының үздіксіздігінен $u\equiv 0$ және $v\equiv 0$. Онда, (3.3.20) және (3.3.21) бойынша $u\equiv v\equiv 0$, ал бұл қарама-қайшылық.

• $p<1/\gamma$ және $q<1/\beta$ жағдайы үшін $\theta_1<0$ немесе $\theta_2<0$ жағдайындағы дәлелдеуі секілді тест функцияны

$$\tilde{\xi}(x,t)=\left(\xi_1(x)\right)^l\xi_2(t)$$

ретінде аламыз. Мұндағы $\xi_1(x)=\Phi\left(\frac{|x|}{R}\right)$, $\xi_2(t)=\left(1-\frac{t}{T}\right)^r$, $r>1$, $l\ge\frac{pq}{(p-1)(q-1)}$ және $R\in(0,T)$ жеткілікті дәрежеде үлкен. Егер $T\to\infty$ болса, онда бір мезетте $R\to\infty$ ұмтыла алмайды. Сонымен қатар, $\Phi(z)$ тегіс өспейтін функция

$$\Phi(z)=\begin{cases}1 & \text{егер } z\le 1,\\ \searrow & \text{егер } 1<z<2,\ 0\le\Phi(z)\le 1,\ z\left|\Phi'(z)\right|\le C_1,\\ 0 & \text{егер } z\ge 2.\end{cases}$$

Онда, (3.3.11) секілді

$$\left(\int_{C_T} v^p\tilde{\xi}\right)^{1-1/pq}\le E^{1/q}D$$
$$\left(\int_{C_T} u^q\tilde{\xi}\right)^{1-1/pq}\le D^{1/p}E \tag{3.3.26}$$

теңсіздіктерін аламыз. Мұндағы

$$C_T:=[0,T]\times\left\{x\in R^N;|x|\le 2R\right\},$$

$$D := C\left(\int_{C_T} \xi_1^l \xi_2^{-\frac{1}{q-1}} \left|D_{t|T}^{2-\gamma}\xi_2\right|^{q'} dxdt\right)^{1/q'} + C\left(\int_{C_T} \xi_1^{l-q'} \xi_2^{-\frac{1}{q-1}} \left|\Delta_x \xi_1 \mathbf{D}_{t|T}^{1-\alpha} D_{t|T}^{1-\gamma}\xi_2\right|^{q'} dxdt\right)^{1/q'}$$

және

$$E := C\left(\int_{C_T} \xi_1^l \xi_2^{-\frac{1}{p-1}} \left|D_{t|T}^{2-\delta}\xi_2\right|^{p'} dxdt\right)^{1/p'} + C\left(\int_{C_T} \xi_1^{l-p'} \xi_2^{-\frac{1}{p-1}} \left|\Delta_x \xi_1 \mathbf{D}_{t|T}^{1-\beta} D_{t|T}^{1-\delta}\xi_2\right|^{p'} dxdt\right)^{1/q'}.$$

Осыдан кейін, $\varepsilon = xR^{-1}$ және $\tau = tT^{-1}$ айнымалыларын алмастыру арқылы және (1.1.2), (1.1.3), (1.1.6) теңдіктері бойынша келесі теңсіздіктерді аламыз:

$$\begin{aligned} &\left(\int_{C_T} v^p \tilde{\xi} dxdt\right)^{1-1/pq} \le C_1(T,R) \\ &\left(\int_{C_T} u^q \tilde{\xi} dxdt\right)^{1-1/pq} \le C_2(T,R). \end{aligned} \qquad (3.3.27)$$

Мұндағы

$$C_1(T,R) = CT^{\varsigma_1}R^{\rho_1} + CT^{\varsigma_2}R^{\rho_2} + CT^{\varsigma_3}R^{\rho_3} + CT^{\varsigma_4}R^{\rho_4},$$

$$C_2(T,R) = CT^{\omega_1}R^{\theta_1} + CT^{\omega_2}R^{\theta_2} + CT^{\omega_3}R^{\theta_3} + CT^{\omega_4}R^{\theta_4}$$

сонымен қатар

$$\begin{cases} \varsigma_1 := \dfrac{1}{q}\left[\dfrac{1}{p'} + \delta - 2\right] + \left[\dfrac{1}{q'} + \gamma - 2\right]; \\ \varsigma_2 := \dfrac{1}{q}\left[\dfrac{1}{p'} + \delta - 2\right] + \left[\dfrac{1}{q'} + \gamma - 2 + \alpha\right]; \\ \varsigma_3 := \dfrac{1}{q}\left[\dfrac{1}{p'} + \delta - 2 + \beta\right] + \left[\dfrac{1}{q'} + \gamma - 2\right]; \\ \varsigma_4 := \dfrac{1}{q}\left[\dfrac{1}{p'} + \delta - 2 + \beta\right] + \left[\dfrac{1}{q'} + \gamma - 2 + \alpha\right], \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega_1 := \frac{1}{p}\left[\gamma - 2 + \frac{1}{q'}\right] + \left[\delta - 2 + \frac{1}{p'}\right]; \\ \omega_2 := \frac{1}{p}\left[\gamma - 2 + \frac{1}{q'}\right] + \left[\alpha + \gamma - 2 + \frac{1}{p'}\right]; \\ \omega_3 := \frac{1}{p}\left[\beta + \delta - 2 + \frac{1}{q'}\right] + \left[\delta - 2 + \frac{1}{p'}\right]; \\ \omega_4 := \frac{1}{p}\left[\beta + \delta - 2 + \frac{1}{q'}\right] + \left[\alpha + \gamma - 2 + \frac{1}{p'}\right] \end{cases}$$

және

$$\begin{cases} \rho_1 := \frac{N}{p'q} + \frac{N}{q'}; \\ \rho_2 := \frac{N}{p'q} + \frac{N}{q'} - 2; \\ \rho_3 := \frac{N}{p'q} + \frac{1}{q}\left[\frac{N}{p'} - 2\right]; \\ \rho_4 := \frac{1}{q}\left[\frac{N}{p'} - 2\right] + \left[\frac{N}{q'} - 2\right], \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta_1 := \frac{N}{pq'} + \frac{N}{p'}; \\ \theta_2 := \frac{N}{pq'} + \frac{N}{p'} - 2; \\ \theta_3 := \frac{N}{p'} + \frac{1}{p}\left[\frac{N}{q'} - 2\right]; \\ \theta_4 := \frac{1}{p}\left[\frac{N}{q'} - 2\right] + \frac{N}{p'} - 2. \end{cases}$$

Келесі кезекте

$$p < \frac{1}{\delta} \Leftrightarrow \frac{1}{p'} < 1 - \delta$$

және

$$q < \frac{1}{\gamma} \Leftrightarrow \frac{1}{q'} < 1 - \gamma$$

екендігін ескеріп, (3.3.27) теңсіздіктер бойынша $T \to \infty$ болғанда

$$\int_0^\infty \int_{|x|\le 2R} v^p \tilde{\xi} dxdt = 0$$

және

$$\int_0^\infty \int_{|x|\le 2R} u^q \tilde{\xi} dxdt = 0$$

теңдіктерін аламыз.
Сәйкесінше R параметрін де $R \to \infty$ ұмтылдыру арқылы $u(x,t) > 0$ және $v(x,t) > 0$ фактілеріне қарама - қайшылық аламыз. Бұдан, $u(x,t) = v(x,t) = 0$.

(3.3.13) теңсіздігіндегі $\theta_1 \le 0$ шарты арқылы

$$\frac{N}{2} \le \max\left\{ \frac{(2-\delta)p + (1-\gamma)pq + 1}{pq-1}, \frac{(2-\gamma)q + (1-\delta)pq + 1}{pq-1} \right\}$$

критикалық көрсеткішін аламыз.

Егер $\delta = 2,\ \gamma = 1,\ q = 1$ және $\gamma = 2,\ \delta = 1,\ p = 1$ болса, онда классикалық Фуджита критикалық көрсеткішімен сәйкес келеді.

3.4 Экспоненциалды бейсызықты диффузия теңдеуінің сингуляр шешімі

Бұл бөлімде экспоненциалды бейсызықты диффузия теңдеуі

$$u_t(x,t) - \Delta_x D_{0|t}^{1-\alpha} u(x,t) = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \int_0^t (t-s)^{-\gamma} e^{u(x,s)} ds,\ \ x \in R^N,\ \ t > 0 \tag{3.4.1}$$

үшін

$$u(x,0) = u_0(x) \ge 0,\ x \in R^N \tag{3.4.2}$$

Коши есебі зерттеледі. Мұндағы $0 < \alpha, \gamma < 1$.

3.4.1 – анықтама (Әлсіз шешім) Берілген $u_0(x) \in L_{loc}^\infty(R^N)$ және $T > 0$ үшін

$$\int_{R^N} u_0(x)\varphi(x,0)dx + \int_0^T \int_{R^N} I_{0|t}^{1-\gamma}(e^u)\varphi(x,t)dxdt =$$

$$= -\int_0^T \int_{R^N} u(x,t) \mathbf{D}_{t|T}^{1-\alpha} \Delta_x \varphi(x,t) dxdt - \int_0^T \int_{R^N} u(x,t)\varphi_t(x,t)dxdt \tag{3.4.3}$$

интегралдық теңдеуді қанағаттандыратын $u \in L^{\infty}_{loc}\left(R^N; L^p\left(0,T\right)\right)$ функциясы (3.4.1) - (3.4.2) есебінің әлсіз шешімі деп аталады. Мұндағы $\varphi\left(x,t\right) \in C^2\left(R^N; C^1\left[0,T\right]\right)$ және $\varphi\left(x,T\right)=0.$

3.4.2 - теорема Айталық, $u_0\left(x\right) \in C_0\left(R^N\right)$ және $u_0\left(x\right) \geq 0,\ u_0\left(x\right) \not\equiv 0$ болсын. Онда (3.4.1) - (3.4.2) есебі глобал шешімге ие бола алмайды.

Дәлелдеуі: Теорема кері жору арқылы дәлелденеді.

Айталық, $u\left(x,t\right)$ функциясы глобал интеграл шешім болсын. Онда $u\left(x,t\right) \in C_0\left(R^N; C\left[0,T\right)\right)$ функциясы (3.4.1) - (3.4.2) теңдеуінің әлсіз шешімі болып табылады.

Берілген $\xi\left(x,t\right),\ \psi\left(x,t\right)$ функцияларын

$$\varphi\left(x,t\right) := \varphi_1^l\left(x\right)\varphi_2\left(t\right)$$

түрінде таңдап алайық. Мұндағы

$$\varphi_1\left(x\right) = \Phi\left(\frac{|x|}{T^{\alpha/2}}\right),\ l>1$$

және

$$\varphi_2\left(t\right) = \begin{cases} \left(1-\dfrac{t}{T}\right)^{\eta}, & t \leq T, \quad \eta > 1, \\ 0, & t > T. \end{cases}$$

Сонымен қатар $\Phi(z)$ тегіс теріс емес функция

$$\Phi\left(z\right) = \begin{cases} 1 & \text{егер } z \leq 1, \\ \searrow & \text{егер } 1 < z < 2, \\ 0 & \text{егер } z \geq 2. \end{cases}$$

Онда, 3.4.1 - анықтама және 1.1.17 - қасиет бойынша

$$\left\{x \in R^N; |x| \leq 2T^{\alpha/2}\right\} \times \left[0,T\right]$$

жиыны үшін

$$\int\limits_{R^N} u_0\varphi_1^l\left(x\right)dx + \int\limits_0^T\int\limits_{R^N} e^{u(x,t)} I_{t|T}^{1-\gamma}\varphi\left(x,t\right)dxdt = -\int\limits_0^T\int\limits_{R^N} u\Delta_x \mathbf{D}_{t|T}^{1-\alpha}\varphi\left(x,t\right)dxdt - \int\limits_0^T\int\limits_{R^N} u\varphi_t\left(x,t\right)dxdt \quad (3.4.4)$$

теңдігі орынды.

Сәйкесінше, $u>0$ екендігін ескеріп және 1.1.20 - қасиет арқылы

$$\int_{R^N} u_0\varphi_1^l(x)\,dx+\int_0^T\int_{R^N} e^{u(x,t)} I_{t|T}^{1-\gamma}\varphi(x,t)\,dxdt \le$$

$$\le l\int_0^T\int_{R^N} u\varphi_1^l(x)(-\Delta_x)\varphi_1(x)\mathbf{D}_{t|T}^{1-\alpha}\varphi_2(t)\,dxdt-\int_0^T\int_{R^N} u\varphi_1^l(x)\frac{d}{dt}\varphi_2(t)\,dxdt \le$$

$$\le l\int_0^T\int_{R^N} u\left|(-\Delta_x)\varphi_1(x)\right|\mathbf{D}_{t|T}^{1-\alpha}\varphi_2(t)\,dxdt+\int_0^T\int_{R^N} u\left|\frac{d}{dt}\varphi_2(t)\right|dxdt \le lM+K$$

бағалауын аламыз. Мұндағы

$$M=\int_0^T\int_{R^N} u\left|(-\Delta_x)\varphi_1(x)\right|\mathbf{D}_{t|T}^{1-\alpha}\varphi_2(t)\,dxdt,$$

$$K=\int_0^T\int_{R^N} u\left|\frac{d}{dt}\varphi_2(t)\right|dxdt.$$

Онда Юнг теңсіздігі арқылы

$$AB\le \varepsilon e^A+B\ln\frac{B}{\varepsilon e},\ \ A,B>0,\ \ \varepsilon>0,$$

келесі белгілеулерді енгізіп

$$\varepsilon=\frac{1}{4l}\varphi(x,t),\ \ A=u(x,t),\ \ B=\left|(-\Delta_x)\varphi_1(x)\right|\mathbf{D}_{t|T}^{1-\alpha}\varphi_2(t),$$

M интегралы үшін

$$M\le\int_0^T\int_{R^N}\left|(-\Delta_x)\varphi_1(x)\right|\mathbf{D}_{t|T}^{1-\alpha}\varphi_2(t)\ln\frac{4l\left|(-\Delta_x)\varphi_1(x)\right|\mathbf{D}_{t|T}^{1-\alpha}\varphi_2(t)}{e\varphi(x,t)}\,dxdt+$$

$$+\frac{1}{4l}\int_0^T\int_{R^N} e^{u(x,t)}\varphi(x,t)\,dxdt$$

бағалауын аламыз.
Сондай-ақ, K интегралы үшін де

$$\varepsilon=\frac{1}{4}\varphi(x,t),\ \ A=u(x,t),\ \ B=\left|\frac{d}{dt}\varphi_2(t)\right|$$

параметрлерін енгізіп, келесі теңсіздікті аламыз:

$$K \le \int_0^T \int_{R^N} \left| \frac{d}{dt}\varphi_2(t) \right| \ln \frac{4\left| \frac{d}{dt}\varphi_2(t) \right|}{e\varphi(x,t)} dxdt + + \frac{1}{4}\int_0^T \int_{R^N} e^{u(x,t)}\varphi(x,t)dxdt.$$

Онда (1.1.5) теңдік бойынша

$$M \le lC\int_0^T \int_{R^N} \left|(-\Delta_x)\varphi_1(x)\right| T^{\alpha-1}\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\eta+\alpha-1} \ln \frac{4lC\left|(-\Delta_x)\varphi_1(x)\right| T^{\alpha-1}\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\eta+\alpha-1}}{e\varphi_1^l(x)\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\eta}} dxdt +$$

$$+\frac{1}{4}\int_0^T \int_{R^N} e^{u(x,t)}\varphi(x,t)dxdt,$$

және

$$K \le \int_0^T \int_{R^N} \left| \frac{d}{dt}\varphi_2(t) \right| \ln \frac{4\left| \frac{d}{dt}\varphi_2(t) \right|}{e\varphi_1^l(x)\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\eta}} dxdt +$$

$$+\frac{1}{4}\int_0^T \int_{R^N} e^{u(x,t)} \frac{\Gamma(\eta+1)}{\Gamma(\eta-\delta+2)}(T-t)^{1-\delta}\varphi(x,t)dxdt,$$

орынды. Мұндағы $C := \dfrac{\Gamma(\eta+1)}{\Gamma(\eta+\alpha)}$.

Сәйкесінше, (1.1.4) теңдігі арқылы

$$\int_{R^N} u_0\varphi_1^l(x)dx + C_1\int_0^T \int_{R^N} e^{v(x,t)}\varphi_1^l(x)T^{1-\gamma}\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\eta-\gamma+1} dxdt \le$$

$$\le lC\int_0^T \int_{R^N} \left|(-\Delta_x)\varphi_1(x)\right| T^{\alpha-1}\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\eta+\alpha-1} \ln \frac{4lC_1\left|(-\Delta_x)\varphi_1(x)\right| T^{\alpha-1}\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\eta+\alpha-1}}{e\varphi_1^l(x)\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\eta}} dxdt +$$

$$+\int_0^T\int_{R^N}\left|\frac{d}{dt}\varphi_2(t)\right|\ln\frac{4\left|\frac{d}{dt}\varphi_2(t)\right|}{e\varphi_1^l(x)\left(1-\frac{t}{T}\right)^\eta}dxdt+\frac{1}{2}\int_0^T\int_{R^N}e^{u(x,t)}\varphi(x,t)dxdt \qquad (3.4.5)$$

теңсіздігін аламыз. Мұндағы

$$C:=\frac{\Gamma(\eta+1)}{\Gamma(\eta+\alpha)},\ C_1:=\frac{\Gamma(\eta+1)}{\Gamma(\eta-\alpha+2)}.$$

Енді x және t айнымалыларын $t=T\tau,\ x=T^{\alpha/2}t$ өрнектерімен алмастыру арқылы

$$dxdt=T^{\frac{\alpha N}{2}+1}dyd\tau,\ \left|\frac{d}{dt}\varphi_2(t)\right|=\eta T^{-1}(1-\tau)^{\eta-1},\ (-\Delta_x)\varphi_1(x)=T^{-\alpha}\left(-\Delta_y\right)\varphi_1(y)$$

теңдіктері орынды болатындығын аламыз. Онда, $\left\{y\in R^N,|y|\le 2\right\}\times[0,1]$ үшін (3.4.5) теңсіздігін

$$\int_{R^N}u_0\varphi_1^l(x)dx+\int_0^T\int_{R^N}e^{u(x,t)}\varphi_1^l(x)\left[C_1T^{1-\gamma}\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\eta-\gamma+1}-\frac{1}{2}\right]dxdt\le$$

$$\le lCT^{\frac{\alpha N}{2}}\int_0^1\int_{R^N}\left|\left(-\Delta_y\right)\varphi_1(y)\right|(1-\tau)^{\eta+\alpha-1}\ln\frac{4lC_1T^{\alpha-1}\left|\left(-\Delta_y\right)\varphi_1(y)\right|(1-\tau)^{\eta+\alpha-1}}{e\varphi_1^l\left(T^{\alpha/2}y\right)(1-\tau)^\eta}dyd\tau+$$

$$+\eta T^{\frac{\alpha N}{2}}\int_0^1\int_{R^N}(1-\tau)^{\eta-1}\ln\frac{4\eta T^{-1}(1-\tau)^{\eta-1}}{e\varphi_1^l(y)(1-\tau)^\eta}dyd\tau \qquad (3.4.6)$$

түрінде жазуға болады.

$\varphi_1(y)$ және $(-\Delta)\varphi_1(y)$ функциялары шенелген екендігі белгілі.

Егер $T\to\infty$ болса, сәйкесінше $\varphi_1(y)\to 1$. Онда, Лебег теоремасы негізінде (3.4.6) теңсіздігінің оң жағы $-\infty$-ке қарай жинақсыз болса, ал сол жағы оң мәнге ие болады. Бұл қарама-қайшылық.

3.5 Экспоненциалды бейсызықты диффузия теңдеулер жүйесінің сингуляр шешімі

Бұл бөлімде экспоненциалды бейсызықты теңдеулер жүйесі

$$\begin{cases} u_t(x,t)-\Delta_x D_{0|t}^{1-\alpha}u(x,t)=\dfrac{1}{\Gamma(1-\gamma)}\displaystyle\int_0^t (t-s)^{-\gamma}e^{v(x,s)}ds, \; x\in R^N, \; t>0, \\ v_t(x,t)-\Delta_x D_{0|t}^{1-\beta}v(x,t)=\dfrac{1}{\Gamma(1-\delta)}\displaystyle\int_0^t (t-s)^{-\delta}e^{u(x,s)}ds, \; x\in R^N, \; t>0 \end{cases} \tag{3.5.1}$$

үшін

$$u(x,0)=u_0(x)\geq 0, \; v(x,0)=v_0(x)\geq 0, \; x\in R^N \tag{3.5.2}$$

Коши есебін зерттейміз. Мұндағы $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in(0,1)$.

3.5.1 - анықтама (Әлсіз шешім) Берілген $u_0(x), v_0(x)\in L_{loc}^{\infty}(R^N)$ және $T>0$ үшін

$$\int_{R^N} u_0(x)\varphi(x,0)dx+\int_0^T\int_{R^N} I_{0|t}^{1-\gamma}(e^v)\varphi(x,t)dxdt=$$

$$=-\int_0^T\int_{R^N} u(x,t)\mathbf{D}_{t|T}^{1-\alpha}\Delta_x\varphi(x,t)dxdt-\int_0^T\int_{R^N} u(x,t)\varphi_t(x,t)dxdt \tag{3.5.3}$$

және

$$\int_{R^N} v_0(x)\varphi(x,0)dx+\int_0^T\int_{R^N} I_{0|t}^{1-\delta}(e^u)\varphi(x,t)dxdt=$$

$$=-\int_0^T\int_{R^N} v(x,t)\mathbf{D}_{t|T}^{1-\beta}\Delta_x\varphi(x,t)dxdt-\int_0^T\int_{R^N} v(x,t)\varphi_t(x,t)dxdt \tag{3.5.4}$$

интегралдық теңдеулерді қанағаттандыратын $(u,v)\in L_{loc}^{\infty}(R^N;L^p(0,T))\times L_{loc}^{\infty}(R^N;L^p(0,T))$ функциялары (3.5.1) - (3.5.2) есебінің әлсіз шешімі деп аталады. Мұндағы $\varphi(x,t)\in C^2(R^N;C^1[0,T])$ және $\varphi(x,T)=0$.

3.5.2 - теорема Айталық $u_0(x)\in C_0(R^N)$ және $u_0(x)\geq 0$, $u_0(x)\not\equiv 0$ болсын. Онда (3.5.1) - (3.5.2) есебінің глобал шешімі болмайды.

Дәлелдеуі: Теорема кері жору арқылы дәлелденеді.

Айталық, (u,v) функциялары (3.5.1) - (3.5.2) есебінің глобал интеграл шешімдері болсын. Онда $(u,v)\in L_{loc}^{\infty}(R^N;L^p(0,T))\times L_{loc}^{\infty}(R^N;L^p(0,T))$ функциялары (3.5.1) - (3.5.2) есебінің әлсіз шешімдері болып табылады.

Берілген $\xi(x,t)$, $\psi(x,t)$ функцияларын

$$\varphi(x,t):=\varphi_1^l(x)\varphi_2(t)$$

түрінде таңдап алайық. Мұндағы

$$\varphi_1(x) = \Phi\left(\frac{|x|}{T^{\theta/2}}\right), \theta = \min\{\alpha, \beta\}, l > 1$$

және

$$\varphi_2(t) = \begin{cases} \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{\eta}, & t \le T, \quad \eta > 1, \\ 0, & t > T. \end{cases}$$

Сәйкесінше, $\Phi(z)$ функциясы тегіс теріс емес функция

$$\Phi(z) = \begin{cases} 1 & \text{егер } z \le 1, \\ \searrow & \text{егер } 1 < z < 2, \\ 0 & \text{егер } z \ge 2, \end{cases}$$

Онда, 3.5.1 – анықтама негізінде және 1.1.17 - қасиет бойынша

$$\left\{x \in R^N; |x| \le 2T^{\alpha/2}\right\} \times [0, T]$$

жиыны үшін

$$\int_{R^N} u_0 \varphi_1^l(x)\,dx + \int_0^T \int_{R^N} e^{v(x,t)} I_{t|T}^{1-\gamma} \varphi(x,t)\,dxdt = -\int_0^T \int_{R^N} u \Delta_x \mathbf{D}_{t|T}^{1-\alpha} \varphi(x,t)\,dxdt - \int_0^T \int_{R^N} u \varphi_t(x,t)\,dxdt \quad (3.5.5)$$

және

$$\int_{R^N} v_0 \varphi_1^l(x)\,dx + \int_0^T \int_{R^N} e^{u(x,t)} I_{t|T}^{1-\delta} \varphi(x,t)\,dxdt = -\int_0^T \int_{R^N} v \Delta_x \mathbf{D}_{t|T}^{1-\beta} \varphi(x,t)\,dxdt - \int_0^T \int_{R^N} v \varphi_t(x,t)\,dxdt \quad (3.5.6)$$

теңдіктері орынды.

Сәйкесінше, $u > 0$ екендігін ескеріп және 1.1.20 - қасиет арқылы

$$\int_{R^N} u_0 \varphi_1^l(x)\,dx + \int_0^T \int_{R^N} e^{v(x,t)} I_{t|T}^{1-\gamma} \varphi(x,t)\,dxdt \le$$

$$\le l \int_0^T \int_{R^N} u \varphi_1^l(x)(-\Delta_x)\varphi_1(x) \mathbf{D}_{t|T}^{1-\alpha} \varphi_2(t)\,dxdt - \int_0^T \int_{R^N} u \varphi_1^l(x) \frac{d}{dt} \varphi_2(t)\,dxdt \le \quad (3.5.7)$$

$$\le l\int_0^T\int_{R^N} u\left|\left(-\Delta_x\right)\varphi_1\left(x\right)\right|\mathbf{D}_{t|T}^{1-\alpha}\varphi_2\left(t\right)dxdt+\int_0^T\int_{R^N} u\left|\frac{d}{dt}\varphi_2\left(t\right)\right|dxdt \le lM_1+K_1$$

және

$$\int_{R^N} v_0\varphi_1^l\left(x\right)dx+\int_0^T\int_{R^N} e^{u(x,t)}I_{t|T}^{1-\delta}\varphi\left(x,t\right)dxdt\le$$

$$\le l\int_0^T\int_{R^N} v\varphi_1^{l-1}\left(x\right)\left(-\Delta_x\right)\varphi_1\left(x\right)\mathbf{D}_{t|T}^{1-\beta}\varphi_2\left(t\right)dxdt-\int_0^T\int_{R^N} v\varphi_1^l\left(x\right)\frac{d}{dt}\varphi_2\left(t\right)dxdt\le \tag{3.5.8}$$

$$\le l\int_0^T\int_{R^N} v\left|\left(-\Delta_x\right)\varphi_1\left(x\right)\right|\mathbf{D}_{t|T}^{1-\beta}\varphi_2\left(t\right)dxdt+\int_0^T\int_{R^N} v\left|\frac{d}{dt}\varphi_2\left(t\right)\right|dxdt \le lM_2+K_2$$

теңсіздіктерін аламыз. Мұндағы

$$M_1=\int_0^T\int_{R^N} u\left|\left(-\Delta_x\right)\varphi_1\left(x\right)\right|\mathbf{D}_{t|T}^{1-\alpha}\varphi_2\left(t\right)dxdt,\ \ K_1=\int_0^T\int_{R^N} u\left|\frac{d}{dt}\varphi_2\left(t\right)\right|dxdt,$$

$$M_2=\int_0^T\int_{R^N} v\left|\left(-\Delta_x\right)\varphi_1\left(x\right)\right|\mathbf{D}_{t|T}^{1-\beta}\varphi_2\left(t\right)dxdt,\ \ K_2=\int_0^T\int_{R^N} v\left|\frac{d}{dt}\varphi_2\left(t\right)\right|dxdt.$$

Бұдан, Юнг теңсіздігі бойынша

$$AB\le\varepsilon e^A+B\ln\frac{B}{\varepsilon e},\ \ A,B>0,\ \ \varepsilon>0,$$

M_1 интегралы үшін параметрлерді

$$\varepsilon=\frac{1}{4l}\frac{\Gamma\left(\eta+1\right)}{\Gamma\left(\eta-\delta+2\right)}\left(T-t\right)^{1-\delta}\varphi\left(x,t\right),$$

$$A=u\left(x,t\right),\ \ B=\left|\left(-\Delta_x\right)\varphi_1\left(x\right)\right|\mathbf{D}_{t|T}^{1-\alpha}\varphi_2\left(t\right)$$

арқылы, сәйкесінше, M_2 интегралы үшін де

$$\varepsilon=\frac{1}{4l}\frac{\Gamma\left(\eta+1\right)}{\Gamma\left(\eta-\gamma+2\right)}\left(T-t\right)^{1-\gamma}\varphi\left(x,t\right),$$

$$A=v\left(x,t\right),\ \ B=\left|\left(-\Delta_x\right)\varphi_1\left(x\right)\right|\mathbf{D}_{t|T}^{1-\beta}\varphi_2\left(t\right)$$

ретінде жазайық. Онда, Юнг теңсіздігінен

$$M_1 \le \int_0^T \int_{R^N} \left|\left(-\Delta_x\right)\varphi_1(x)\right| \mathbf{D}_{t|T}^{1-\alpha}\varphi_2(t) \ln \frac{4l\left|\left(-\Delta_x\right)\varphi_1(x)\right| \mathbf{D}_{t|T}^{1-\alpha}\varphi_2(t)}{e\frac{\Gamma(\eta+1)}{\Gamma(\eta-\delta+2)}(T-t)^{1-\delta}\varphi(x,t)} dxdt +$$

$$+\frac{1}{4l}\int_0^T \int_{R^N} e^{u(x,t)} \frac{\Gamma(\eta+1)}{\Gamma(\eta-\delta+2)}(T-t)^{1-\delta}\varphi(x,t)\,dxdt$$

және

$$M_2 \le \int_0^T \int_{R^N} \left|\left(-\Delta_x\right)\varphi_1(x)\right| \mathbf{D}_{t|T}^{1-\beta}\varphi_2(t) \ln \frac{4l\left|\left(-\Delta_x\right)\varphi_1(x)\right| \mathbf{D}_{t|T}^{1-\beta}\varphi_2(t)}{e\frac{\Gamma(\eta+1)}{\Gamma(\eta-\gamma+2)}(T-t)^{1-\gamma}\varphi(x,t)} dxdt +$$

$$+\frac{1}{4l}\int_0^T \int_{R^N} e^{v(x,t)} \frac{\Gamma(\eta+1)}{\Gamma(\eta-\gamma+2)}(T-t)^{1-\gamma}\varphi(x,t)\,dxdt$$

бағалаулары орынды.

Сонымен қатар, жоғарыдағы секілді K_1 интегралы үшін параметрлер

$$\varepsilon = \frac{1}{4}\frac{\Gamma(\eta+1)}{\Gamma(\eta-\delta+2)}(T-t)^{1-\delta}\varphi(x,t),$$

$$A = u(x,t),\;\; B = \left|\frac{d}{dt}\varphi_2(t)\right|$$

түрінде, ал, K_2 интегралы үшін де

$$\varepsilon = \frac{1}{4}\frac{\Gamma(\eta+1)}{\Gamma(\eta-\gamma+2)}(T-t)^{1-\gamma}\varphi(x,t),$$

$$A = v(x,t),\;\; B = \left|\frac{d}{dt}\varphi_2(t)\right|$$

арқылы жазайық. Онда, Юнг теңсіздігінен

$$K_1 \le \int_0^T \int_{R^N} \left| \frac{d}{dt}\varphi_2(t) \right| \ln \frac{4\left| \frac{d}{dt}\varphi_2(t) \right|}{e\frac{\Gamma(\eta+1)}{\Gamma(\eta-\delta+2)}(T-t)^{1-\delta}\varphi(x,t)} dxdt +$$

$$+\frac{1}{4}\int_0^T \int_{R^N} e^{u(x,t)} \frac{\Gamma(\eta+1)}{\Gamma(\eta-\delta+2)}(T-t)^{1-\delta}\varphi(x,t)dxdt$$

және

$$K_2 \le \int_0^T \int_{R^N} \left| \frac{d}{dt}\varphi_2(t) \right| \ln \frac{4\left| \frac{d}{dt}\varphi_2(t) \right|}{e\frac{\Gamma(\eta+1)}{\Gamma(\eta-\gamma+2)}(T-t)^{1-\gamma}\varphi(x,t)} dxdt +$$

$$+\frac{1}{4}\int_0^T \int_{R^N} e^{v(x,t)} \frac{\Gamma(\eta+1)}{\Gamma(\eta-\gamma+2)}(T-t)^{1-\gamma}\varphi(x,t)dxdt$$

теңсіздіктері орынды.

Сондай-ақ (1.1.5) теңдігі арқылы

$$M_1 \le lC_1\int_0^T \int_{R^N} \left|(-\Delta_x)\varphi_1(x)\right| T^{\alpha-1}\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\eta+\alpha-1} \ln \frac{4lC_1\left|(-\Delta_x)\varphi_1(x)\right| T^{\alpha-1}\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\eta+\alpha-1}}{e\frac{\Gamma(\eta+1)}{\Gamma(\eta-\delta+2)}(T-t)^{1-\delta}\varphi(x,t)} dxdt +$$

$$+\frac{1}{4}\int_0^T \int_{R^N} e^{u(x,t)} \frac{\Gamma(\eta+1)}{\Gamma(\eta-\delta+2)}(T-t)^{1-\delta}\varphi(x,t)dxdt$$

және

$$K_1 \le \int_0^T \int_{R^N} \left| \frac{d}{dt}\varphi_2(t) \right| \ln \frac{4\left| \frac{d}{dt}\varphi_2(t) \right|}{e\frac{\Gamma(\eta+1)}{\Gamma(\eta-\delta+2)}(T-t)^{1-\delta}\varphi(x,t)} dxdt +$$

$$+\frac{1}{4}\int_0^T \int_{R^N} e^{u(x,t)} \frac{\Gamma(\eta+1)}{\Gamma(\eta-\delta+2)}(T-t)^{1-\delta}\varphi(x,t)dxdt$$

орынды. Мұндағы $C_1 := \frac{\Gamma(\eta+1)}{\Gamma(\eta+\alpha)}$.

Сәйкесінше, (1.1.4) теңдігі бойынша

$$M_2 \le lC_2 \int_0^T \int_{R^N} \left|(-\Delta_x)\varphi_1(x)\right| T^{\beta-1} \left(1-\frac{t}{T}\right)^{\eta+\beta-1} \ln \frac{4lC_2 \left|(-\Delta_x)\varphi_1(x)\right| T^{\beta-1} \left(1-\frac{t}{T}\right)^{\eta+\beta-1}}{e \frac{\Gamma(\eta+1)}{\Gamma(\eta-\gamma+2)} (T-t)^{1-\gamma} \varphi(x,t)} dxdt +$$

$$+\frac{1}{4}\int_0^T \int_{R^N} e^{v(x,t)} \frac{\Gamma(\eta+1)}{\Gamma(\eta-\gamma+2)} (T-t)^{1-\gamma} \varphi(x,t)\, dxdt$$

және

$$K_2 \le \int_0^T \int_{R^N} \left|\frac{d}{dt}\varphi_2(t)\right| \ln \frac{4\left|\frac{d}{dt}\varphi_2(t)\right|}{e \frac{\Gamma(\eta+1)}{\Gamma(\eta-\gamma+2)} (T-t)^{1-\gamma} \varphi(x,t)} dxdt +$$

$$+\frac{1}{4}\int_0^T \int_{R^N} e^{v(x,t)} \frac{\Gamma(\eta+1)}{\Gamma(\eta-\gamma+2)} (T-t)^{1-\gamma} \varphi(x,t)\, dxdt$$

орынды болады. Мұндағы $C_2 := \dfrac{\Gamma(\eta+1)}{\Gamma(\eta+\beta)}$.

Барлық бағалаулардың комбинациялары және (1.1.4) теңдігі бойынша

$$\int_{R^N} u_0 \varphi_1^l(x)\, dx + C_3 \int_0^T \int_{R^N} e^{v(x,t)} \varphi(x,t) (T-t)^{1-\gamma}\, dxdt \le$$

$$\le lC_1 \int_0^T \int_{R^N} \left|(-\Delta_x)\varphi_1(x)\right| T^{\alpha-1} \left(1-\frac{t}{T}\right)^{\eta+\alpha-1} \ln \frac{4lC_1 \left|(-\Delta_x)\varphi_1(x)\right| T^{\alpha-1} \left(1-\frac{t}{T}\right)^{\eta+\alpha-1}}{eC_4 (T-t)^{1-\delta} \varphi(x,t)} dxdt +$$

$$+\int_0^T \int_{R^N} \left|\frac{d}{dt}\varphi_2(t)\right| \ln \frac{4\left|\frac{d}{dt}\varphi_2(t)\right|}{eC_4 (T-t)^{1-\delta} \varphi(x,t)} dxdt + \frac{1}{2} C_4 \int_0^T \int_{R^N} e^{u(x,t)} (T-t)^{1-\delta} \varphi(x,t)\, dxdt \quad (3.5.9)$$

және

$$\int_{R^N} v_0 \varphi_1^l(x)\, dx + C_4 \int_0^T \int_{R^N} e^{u(x,t)} \varphi(x,t) (T-t)^{1-\delta}\, dxdt \le$$

$$\leq lC_2\int_0^T\int_{R^N}\left|(-\Delta_x)\varphi_1(x)\right|T^{\beta-1}\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\eta+\beta-1}\ln\frac{4lC_1\left|(-\Delta_x)\varphi_1(x)\right|T^{\beta-1}\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\eta+\beta-1}}{eC_3(T-t)^{1-\gamma}\varphi(x,t)}dxdt+$$

$$+\int_0^T\int_{R^N}\left|\frac{d}{dt}\varphi_2(t)\right|\ln\frac{4\left|\frac{d}{dt}\varphi_2(t)\right|}{eC_3(T-t)^{1-\gamma}\varphi(x,t)}dxdt+\frac{1}{2}C_3\int_0^T\int_{R^N}e^{v(x,t)}(T-t)^{1-\gamma}\varphi(x,t)dxdt \quad (3.5.10)$$

орынды. Мұндағы

$$C_3:=\frac{\Gamma(\eta+1)}{\Gamma(\eta-\gamma+2)},$$

$$C_4:=\frac{\Gamma(\eta+1)}{\Gamma(\eta-\delta+2)}.$$

Онда, (3.5.9) - (3.5.10) теңсіздіктері комбинацияларынана және $u_0(x)$, $v_0(x)\geq 0$ негізінде

$$\int_{R^N}u_0\varphi_1^l(x)dx+\frac{3}{4}C_3\int_0^T\int_{R^N}e^{v(x,t)}\varphi(x,t)(T-t)^{1-\gamma}dxdt\leq$$

$$\leq lC_1\int_0^T\int_{R^N}\left|(-\Delta_x)\varphi_1(x)\right|T^{\alpha-1}\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\eta+\alpha-1}\ln\frac{4lC_1\left|(-\Delta_x)\varphi_1(x)\right|T^{\alpha-1}\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\eta+\alpha-1}}{eC_4(T-t)^{1-\delta}\varphi(x,t)}dxdt+$$

$$+\int_0^T\int_{R^N}\left|\frac{d}{dt}\varphi_2(t)\right|\ln\frac{4\left|\frac{d}{dt}\varphi_2(t)\right|}{eC_4(T-t)^{1-\delta}\varphi(x,t)}dxdt+$$

$$+\frac{l}{2}C_2\int_0^T\int_{R^N}\left|(-\Delta_x)\varphi_1(x)\right|T^{\beta-1}\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\eta+\beta-1}\ln\frac{4lC_1\left|(-\Delta_x)\varphi_1(x)\right|T^{\beta-1}\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\eta+\beta-1}}{eC_3(T-t)^{1-\gamma}\varphi(x,t)}dxdt+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^T\int_{R^N}\left|\frac{d}{dt}\varphi_2(t)\right|\ln\frac{4\left|\frac{d}{dt}\varphi_2(t)\right|}{eC_3(T-t)^{1-\gamma}\varphi(x,t)}dxdt \quad (3.5.11)$$

және

$$\int_{R^N} v_0\varphi_1^l(x)dx+\frac{3}{4}C_4\int_0^T\int_{R^N} e^{u(x,t)}\varphi(x,t)(T-t)^{1-\delta}\,dxdt\le$$

$$\le lC_2\int_0^T\int_{R^N}\left|(-\Delta_x)\varphi_1(x)\right|T^{\beta-1}\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\eta+\beta-1}\ln\frac{4lC_1\left|(-\Delta_x)\varphi_1(x)\right|T^{\beta-1}\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\eta+\beta-1}}{eC_3(T-t)^{1-\gamma}\varphi(x,t)}dxdt+$$

$$+\int_0^T\int_{R^N}\left|\frac{d}{dt}\varphi_2(t)\right|\ln\frac{4\left|\frac{d}{dt}\varphi_2(t)\right|}{eC_3(T-t)^{1-\gamma}\varphi(x,t)}dxdt+$$

$$\le\frac{l}{2}C_1\int_0^T\int_{R^N}\left|(-\Delta_x)\varphi_1(x)\right|T^{\alpha-1}\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\eta+\alpha-1}\ln\frac{4lC_1\left|(-\Delta_x)\varphi_1(x)\right|T^{\alpha-1}\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\eta+\alpha-1}}{eC_4(T-t)^{1-\delta}\varphi(x,t)}dxdt+$$

$$+\int_0^T\int_{R^N}\left|\frac{d}{dt}\varphi_2(t)\right|\ln\frac{4\left|\frac{d}{dt}\varphi_2(t)\right|}{eC_4(T-t)^{1-\delta}\varphi(x,t)}dxdt \qquad (3.5.12)$$

орынды.

Келесі кезекте, x және t айнымалыларын $t=T\tau$ және $x=T^{\frac{\theta}{2}}y,\ \theta:=\{\alpha,\beta\}$ өрнектерімен алмастыру арқылы (3.5.11) - (3.5.12) теңсіздіктерін

$$\int_{R^N} u_0\varphi_1^l(x)dx+\frac{3}{4}C_3\int_0^T\int_{R^N} e^{v(x,t)}\varphi(x,t)(T-t)^{1-\gamma}\,dxdt\le$$

$$\le lC_1T^{\frac{\alpha N}{2}}\int_0^1\int_{R^N}\left|(-\Delta_y)\varphi_1(y)\right|T^{\alpha-1}(1-\tau)^{\eta+\alpha-1}\ln\frac{4lC_1\left|(-\Delta_y)\varphi_1(y)\right|T^{\alpha-1}(1-\tau)^{\eta+\alpha-1}}{eC_4T^{1-\delta}(1-\tau)^{1-\delta}\varphi(y,\tau)}dyd\tau+$$

$$+\eta T^{\frac{\alpha N}{2}}\int_0^1\int_{R^N}(1-\tau)^{\eta-1}\ln\frac{4\eta T^{-1}(1-\tau)^{\eta-1}}{eC_4T^{1-\delta}(1-\tau)^{1-\delta}\varphi(y,\tau)}dyd\tau+$$

$$+\frac{l}{2}C_2T^{\frac{\beta N}{2}}\int_0^1\int_{R^N}\left|(-\Delta_1)\varphi_1(y)\right|(1-\tau)^{\eta+\beta-1}\ln\frac{4lC_1\left|(-\Delta_y)\varphi_1(y)\right|T^{\beta-1}(1-\tau)^{\eta+\beta-1}}{eC_3T^{1-\gamma}(1-\tau)^{1-\gamma}\varphi(y,\tau)}dyd\tau+$$

$$+\frac{\eta}{2}T^{\frac{\beta N}{2}}\int_0^1\int_{R^N}(1-\tau)^{\eta-1}\ln\frac{4\eta T^{-1}(1-\tau)^{\eta-1}}{eC_3T^{1-\gamma}(1-\tau)^{1-\gamma}\varphi(y,\tau)}dyd\tau \qquad (3.5.13)$$

және

$$\int_{R^N} v_0\varphi_1^l(x)\,dx+\frac{3}{4}C_4\int_0^T\int_{R^N} e^{u(x,t)}\varphi(x,t)(T-t)^{1-\delta}\,dxdt\le$$

$$\le lC_2T^{\frac{\beta N}{2}}\int_0^1\int_{R^N}\left|(-\Delta_1)\varphi_1(y)\right|(1-\tau)^{\eta+\beta-1}\ln\frac{4lC_1\left|(-\Delta_y)\varphi_1(y)\right|T^{\beta-1}(1-\tau)^{\eta+\beta-1}}{eC_3T^{1-\gamma}(1-\tau)^{1-\gamma}\varphi(y,\tau)}dyd\tau+$$

$$+\eta T^{\frac{\beta N}{2}}\int_0^1\int_{R^N}(1-\tau)^{\eta-1}\ln\frac{4\eta T^{-1}(1-\tau)^{\eta-1}}{eC_3T^{1-\gamma}(1-\tau)^{1-\gamma}\varphi(y,\tau)}dyd\tau+$$

$$+\frac{l}{2}C_1T^{\frac{\alpha N}{2}}\int_0^1\int_{R^N}\left|(-\Delta_1)\varphi_1(y)\right|(1-\tau)^{\eta+\alpha-1}\ln\frac{4lC_1\left|(-\Delta_y)\varphi_1(y)\right|T^{\alpha-1}(1-\tau)^{\eta+\alpha-1}}{eC_4T^{1-\delta}(1-\tau)^{1-\delta}\varphi(y,\tau)}dyd\tau+$$

$$+\frac{\eta}{2}T^{\frac{\alpha N}{2}}\int_0^1\int_{R^N}(1-\tau)^{\eta-1}\ln\frac{4\eta T^{-1}(1-\tau)^{\eta-1}}{eC_4T^{1-\delta}(1-\tau)^{1-\delta}\varphi(y,\tau)}dyd\tau \qquad (3.5.14)$$

ретінде өрнектей аламыз. Онда, Лебег теоремасы бойынша $T\to+\infty$ болғанда (3.5.13) - (3.5.14) теңсіздігінің оң жағы $-\infty$-ке қарай жинақсыз болса, ал сол жағы оң мәнге ие болады.

Бұл қарама-қайшылық.

ҚОРЫТЫНДЫ

Бұл диссертациялық жұмыста, бөлшек ретті дифференциалдық теңдеулердің регуляр және сингуляр шешімдерін зерттеу барысында, келесі негізгі нәтижелер алынды:

1) Риман - Лиувилль, Капуто - Фабрицио және жалпыланған Капуто - Фабрицио мағынасындағы бөлшек ретті дифференциалдық операторлар қатысқан диффузия теңдеуі үшін максимум қағидасы зерттелді.

Алынған нәтижелердің қолданысы ретінде сызықты және бейсызықты диффузия теңдеуінің шешімдерінің жалғыздығы, сонымен қатар шешімнің бастапқы берілгендерден үздіксіз тәуелді болатындығы көрсетілді.

2) Сызықты бөлшек ретті диффузия теңдеуі үшін Дьюамел қағидасының баламасы алынды.

3) Бейлокалды және салмақты бейсызықты диффузия теңдеулері мен теңдеу жүйелерінің локалды шешімдерінің бар болатындығы дәлелденді.

4) Экспоненциалды бейсызықты бөлшек ретті диффузия теңдеуі және теңдеулер жүйесінің локал және глобал шешілімділігі зерттеліп, локал шешімнің бар, ал глобал шешімнің жоқ болатындығы дәлелденді.

5) Полинималды бейсызықты бөлшек ретті диффузия теңдеуі мен теңдеулер жүйесі үшін глобал шешімнің болмау шарттары, яғни Фуджита тектес критикалық көрсеткіштері анықталды.

ҚОЛДАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

1 Richardson L.F. Atmospheric Diffusion Shown on a Distance-Neighbour Graph // Proceedings of the Royal Society of London. Series A. – 1926. – Vol. 110, № 756. – P. 709-737.

2 Учайкин В. В. Аномальный перенос частиц с конечной скоростью и асимптотическая фрактальность // Журнал технической физики. – 1998. – Т. 68, № 1. – С. 138-139.

3 Luchko Y. Maximum principle for the generalized time-fractional diffusion equation // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2009. – Vol. 351. – P. 218-223.

4 Luchko Y. Some uniqueness and existence results for the initial boundary-value problems for the generalized time-fractional diffusion equation // Computers and Mathematics with Applications. – 2010. – Vol. 59. – P. 1766-1772.

5 Luchko Y. Initial-boundary-value problems for the generalized multi-term time-fractional diffusion equation // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2011. – Vol. 374. – P. 538-548.

6 Luchko Y. Boundary value problems for the generalized time-fractional diffusion equation of distributed order // Fractional Calculus and Applied Analysis. – 2009. – Vol. 12, № 4. – P. 409-422.

7 Al-Refai M., Luchko Y. Maximum principle for the multi-term time-fractional diffusion equations with the Riemann-Liouville fractional derivatives // Applied Mathematics and Computation. – 2015. – Vol. 257. – P. 40-51.

8 Chan C.Y., Liu H.T. A maximum principle for fractional diffusion equations // Quarterly of Applied Mathematics. – 2016. – Vol. 74, № 3. – P. 421-427.

9 Kirane M., Torebek B. T. Extremum principle for the Hadamard derivatives and its application to nonlinear fractional partial differential equations // Fractional Calculus and Applied Analysis. -2019. – Vol. 22, № 2. – P. 358-378.

10 Luchko Y., Yamamoto M. On the maximum principle for a time-fractional diffusion equation // Fractional Calculus and Applied Analysis. – 2017. – Vol. 20, № 5. – P. 1131-1145.

11 Fujita H. On the blowing up of solutions to the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$ // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sec. I. – 1966. – Vol. 13. – P. 109-124.

12 Fujita H. On some nonexistence and nonuniqueness theorems for nonlinear a parabolic equations // Proc. Symp. Pure Math. – 1968. V. 18, part I. – P. 138-161.

13 Galaktionov V. A., Pohozaev S. I. Existence and blow-up for higher-order semilinear parabolic equations: majorizing order-preserving operators // Indiana Univ. Math. J. – 2002. – Vol. 51, № 6. – P. 1321-1338.

14 Cazenave T., Dickstein F., Weissler F. B. An equation whose Fujita critical exponent is not given by scaling // Nonlinear Anal. – 2008. – Vol. 68, № 4. – P. 862-874.

15 Souplet Ph. Single-point blow-up for a semilinear parabolic system // J. Eur. Math. Soc. – 2009. – Vol. 11, № 1. – P. 169-188.

16 Collot C., Merle F., Raphaël P. Dynamics near the ground state for the energy critical nonlinear heat equation in large dimensions // Comm. Math. Phys. – 2017. – Vol. 352, № 1. – P. 215-285.

17 Quittner P., Souplet P. Superlinear Parabolic Problems, Blow-Up, Global Existence and Steady States, second ed. – Switzerland: Birkhäuser, 2019. – 725 p.

18 Escobedo M., Herrero M. A. Boundedness and blow up for a semilinear reaction-diffusion system // Journal Differential Equations. – 1991. – Vol. 89. – P. 176-202.

19 Mitidieri E., Pohozaev S. I. A priori estimates and blow-up of solutions to nonlinear partial differential equations and inequalities // Proc. Steklov. Inst. Math. – 2001. – Vol. 234. – P. 1-383.

20 Kirane M., Laskri Y., Tatar N. Critical exponents of Fujita type for certain evolution equationsand systems with spatio-temporal fractional derivatives // J. Math. Anal. Appl. – 2005. – Vol. 312. – P. 488-501.

21 Kirane M., Ahmad B., Alsaedi A., Al-Yami M., Non-existence of global solutions to a system of fractional diffusion equations // Acta Appl. Math. – 2014. – Vol. 133. – P. 235-248.

22 Zhang Q., Sun H. The blow-up and global existence of solutions of Cauchy problems for a time-fractional diffusion equation // Topol. Meth. Nonlinear Anal. – 2015. – Vol. 46, № 1. – P. 69-92.

23 Vergara V., Zacher R. Stability, instability, and blowup for time fractional and other nonlocal in time semilinear subdiffusion equations // J. Evol. Equ. – 2017. – Vol. 17. – P. 599-626.

24 Li Y., Zhang Q. Blow-up and global existence of solutions for a time-fractional diffusion equation // Fract. Calc. Appl. Anal. – 2018. – Vol. 21. – P. 1619-1640.

25 Zhang Q., Li Y. The critical exponent for a time fractional diffusion equation with nonlinear memory // Mathematical Methods in the Applied Sciences. – 2018. – Vol. 41, № 16. – P. 6443-6456.

26 Nabti A. Life span of blowing-up solutions to the Cauchy problem for a time-space fractional diffusion equation // Comput. Math. Appl. – 2019. – Vol. 78. – P. 1302-1316.

27 Cao J., Song G., Wang J., Shi Q., Sun S. Blow-up and global solutions for a class of time fractional nonlinear reaction-diffusion equation with weakly spatial source // Applied Mathematics Letters. – 2019. – Vol. 91. – P. 201-206.

28 Gal C. G ., Warma M. Fractional-in-Time Semilinear Parabolic Equations and Applications – Switzerland: Mathématiques et Applications 84. Springer, 2020. – 184 p.

29 Tapdigoğlu R., Torebek B. Global existence and blow-up of solutions of the time-fractional space-involution reaction-diffusion equation // Turkish Journal of Mathematics. – 2020. – Vol. 44. – P. 960-969.

30 Alsaedi A., Kirane M., Torebek B. T. Global existence and blow-up for a space and time nonlocal reaction-diffusion equation // Quaestiones Mathematicae. – 2020. – P. 1-7. doi: 10.2989/16073606.2020.1745923

31 Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. – Amsterdam, London and New York: North-Holland Mathematical Studies, Elsevier (North-Holland) Science Publishers, 2006. – 523 p.

32 Caputo M., Fabrizio M. A new defininition of fractional without singular kernel // Progr. Fract. Differ. Appl. – 2015. – Vol. 1, № 2. – P. 73-85.

33 Losada J., Nieto J.J. Properties of a new fractional derivative without singular kernel // Progr. Fract. Differ. Appl. – 2015. – Vol.1, № 2. – P. 87-92.

34 Gustavo Asumu M., Boro Nchama. Properties of Caputo-Fabrizio fractional operators // New Trends in Mathematical Sciences. – 2020. – Vol. 8, No 1. – P. 1-25.

35 Atangana A., Baleanu D. New fractional derivative with non-local and non-singular kernel // Thermal. – 2016. – Vol. 20, № 2. – P. 763-769.

36 Hormander L. The Analysis of Linear Partial Differential Operators I. Second edition. – New York: Springer, 1990. – 440 p.

37 Salasnich L. Quantum Physics of Light and Matter. – Padua: Springer, 2017. – 231 p.

38 Erdelyi A., Magnus W., Oberhettinger F. and Tricomi F. G. Higher Transcendental Functions – New York: McGraw-Hill, 1955. – 308 p.

39 Boudabsa L., Simon T., Vallois P. Fractional extreme distributions // ArXiv. – 2019. – P. 1-46. arXiv: 1908.00584v1.

40 Ju N. Existence and Uniqueness of the Solution to the Dissipative 2D Quasi-Geostrophic Equations in the Sobolev Space // Commun. Math. Phys. – 2004. – Vol. 251. – P. 365-376.

41 Al-Refai M., Luchko Y. Maximum principle for the fractional diffusion equations with the Riemann-Liouville fractional derivative and its applications // Fractional Calculus and Applied Analysis. – 2014. – Vol. 17, № 2. – P. 483-498. doi:10.2478/s13540-014-0181-5.

42 Borikhanov M., Torebek B. T. Maximum principle and its application for the sub-diffusion equations with Caputo-Fabrizio fractional derivative // Математический журнал. – 2018. – Т. 18, № 1. – С. 43-52.

43 Il'in A.M., Oleinik O.A. Kalashnikov A.S. Linear equations of the second order of parabolic type // Russian Mathematical Surveys. – 1962. – Vol.17, № 3. – P. 1-144.

44 Borikhanov M. B. Maximum principle and its application for the nonlinear time-fractional Stokes's first problem // Traditional International April scientific conference in honor of the Science Day. – Almaty, – 2018. – P. 27.

45 Borikhanov M.B. Maximum principle and its application for the nonlinear time-fractional diffusion equations // Современные методы теории краевых задач: материалы международной конференции «Понтрягинские чтения – XXIX», посвященной 90 – летию Владимира Александровича Ильина. – Москва, 2018.– С. 251-252.

46 Borikhanov M., Kirane M., Torebek B. T. Maximum principle and its application for the non-linear time-fractional diffusion equations with Cauchy-Dirichlet conditions // Applied Mathematics Letters. – 2018. – Vol. 81. – P. 14-20.

47 Miller K.S., Samko S.G. A note on the complete monotonicity of the generalized Mittag-Leffler function // Real Anal. Exchange. – 1997. – Vol. 23, № 2. – P. 753-755.
48 Nieto J.J. Maximum principles for fractional differential equations derived from Mittag-Leffler functions // Appl. Math. Lett. – 2010. – Vol. 23, № 10. – P. 1248-1251.
49 Umarov S. On fractional Duhamel's principle and its applications // Journal of Differential Equations. – 2012. – Vol. 252. – P. 5217-5234.
50 Podlubny I. Fractional differential equations. Mathematics in Science and Engineering – San Diego, CA: AcademicPress198., Inc., 1999. – 365 p.
51 M. Borikhanov, B. K. Turmetov, On construction of solutions of linear fractional differential equations with constant coefficients // AIP Conference Proceedings. – 1759 (2016), 020151.
52 Borikhanov M. B. Mild solution to integro-differential diffusion system with nonlocal source // Kazakh Mathematical Journal. – 2020. – Vol. 20, № 1. – P. 18-26.
53 Borikhanov M., Torebek B. Local existence and global nonexistence results for an integro-differential diffusion system with nonlocal nonlinearities // Math Meth Appl Sci. – 2020. – P. 1796-1811. doi: 10.1002/mma.6878.
54 Borikhanov M., Torebek B. Critical exponents of Fujita type for certain time-fractional diffusion equations // International Journal of Mathematics and Physics. – 2018. – Vol. 9, № 2. – P. 43-49.
55 Fino A.Z., Kirane M. Qualitative properties of solutions to a nonlocal evolution system // Math Meth Appl Sci. – 2011. – Vol. 34. – P. 1125-1143.